Géométrie 2

L3 Mathématiques 2020/21, TD12

Leonardo Colò

XI seance, 13 Avril 2021

Exercice 1

Exercice. On considére un rectangle passant par le point de coordonnées $(7/3, 0)$, ayant pour sommet le point de coordonnées $(2, 3)$ et dont un des cotés a pour équation

$$2x - 3y + 5 = 0$$

Déterminer des équations des autres cotés et les coordonnées du centre.

Solution.

Exercice 2

Exercice. On considére un triangle $\{A, B, C\}$ tel que $A \equiv (2, 7)$, la hauteur issue de B a pour équation $3x + y + 11 = 0$ et la médiane issue de C a pour équation $x + 2y + 7 = 0$. Déterminer des équations des cotés du triangle.

Solution.

Exercice 3

Exercice. Soient $A \equiv (2,4)$,$B \equiv (-2,-4)$ et $C \equiv (7,-1)$. Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle. En donner une équation. Déterminer aussi une équation de la droite d'Euler. Déterminer l'intersection de cette droite avec le cercle circonscrit.

Solution.

Exercice 4

Exercice. On considére les points A, B et C de coordonnées respectives $(-3, 1)$, $(1, 5)$ et $(3, -3)$. Déterminer des équations des médianes, des médiatrices et des hauteurs du triangle $\widehat{ABC}$. Déterminer leurs intersections respectives G, O et H. Vérifier que ces trois points sont alignés. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle $\widehat{ABC}$. Déterminer les symétriques de H par les symétries orthogonales par rapport aux cotés du triangles. Vérifier que ces trois points sont sur le cercle circonscrit. Même chose avec les symétriques par rapport aux milieux des cotés.

Solution.

Exercice 5

Exercice. On note $\Omega \equiv (0,0,0)$ le centre du repére et A, B et C les points de coordonnées respectives $A \equiv (2\sqrt{3},0,0)$, $B \equiv (0,2,0)$ et $C \equiv (0,0,1)$. Déterminer un équation du plan passant par A, B et C. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H de Ω sur ce plan. Calculer la distance de Ω à ce plan. Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire au plan passant par Ω, C et H. Montrer que H est l'orthocentre du triangle $\widehat{ABC}$.

Solution.

Exercice 6

Exercice. Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 10y + 9 = 0$$

dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Déterminer son équation réduite dans un repère orthonormal. En déduire la nature de la conique, son excentricité. Préciser un foyer et une directrice.

Solution.

Exercice 7

Exercice. **a.** Montrer qu'une ellipse est parfaitement déterminée par la donnée de ses deux foyers F et F' et d'un de ses sommets A.

b. Montrer qu'une hyperbole est complètement déterminée par la donnée de ses deux foyers F et F' et d'un de ses sommets A.

c Montrer qu'une parabole est entièrement déterminée par la donnée de son foyer F et de son sommet A.

Solution.

Exercice 8

Exercice. **a.** Montrer qu'une droite rencontre une conique en au plus deux points.

b. Soit $\mathcal{C}$ une conique à centre d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \epsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($\epsilon = \pm 1$) dans un repère orthonormal. Montrer que l'équation de la tangente au point $M_0 \equiv (x_0, y_0)$ est $\frac{xx_0}{a} + \epsilon \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

c. Soit $\mathcal{P}$ une parabole d'équation réduite $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormal. Montrer que la tangente à $\mathcal{P}$ au point $M_0 \equiv (x_0, y_0)$ a pour équation $yy_0 = p(x + x_0)$.

Solution.

Exercice 9

Exercice. Dans le plan affine euclidien, un point M décrit une ellipse de foyers F et F'. Quel est l'ensemble des centres du cercle inscrit au triangle $\widehat{MFF'}$?

Solution.

Exercice 10

Exercice. Construire le foyer et la directrice d'une parabole connaissant:

a. Deux points M et M' tels que la droite (MM') passe par le foyer et soit parallèle à la directrice.

b. Le foyer et deux tangentes.

c. Le foyer, un point et la tangente en ce point.

d. Le foyer, un point et une tangente.

e. La directrice et deux tangentes.

f. La tangente au sommet, un point et la tangente en ce point.

Solution.