Géométrie 2

L3 Mathématiques 2020/21, TD11

Leonardo Colò

XI seance, 06 Avril 2021

Exercice 1

Exercice. Soit u un endomorphisme (linéaire) d'un espace vectoriel euclidien V . On suppose que deux des trois affirmations suivantes sont vraies:

(a) u est involutive ($u \circ u = \mathrm{Id}_V$);

(b) u est orthogonale;

(c) u est symétrique.

Montrer que la troisiéme affirmation est également vraie et que u est une symétrie orthogonale.

Solution.

Exercice 2

Exercice. Soit $t = t_u$ (avec $u \in E$) une translation d'un espace affine euclidien E de dimension finie. Démontrer qu'on peut trouver deux hyperplans affines H_1 et H_2 tels que $t = \sigma H_1 \circ \sigma_{H_2}$. Quelles conditions vérifient les hyperplans H_1 et H_2? Sont-ils uniques ?

Solution.

Exercice 3

Exercice. Soit φ une transformation orthogonale (linéaire) d'un espace vectoriel euclidien V et soit λ une valeur propre de φ. Montrer que $|\lambda| = 1$.

Solution.

Exercice 4

Exercice. Dans le plan affine euclidien orienté P, muni d'un repére cartésien orthonormé R, on considére l'application f de P dans lui-même, d éfinie par ses formules analytiques

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \end{cases}$$

Déterminer la nature et les éléments de f.
Même question avec g définie par

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \\ y' = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}y + 1\right) \end{cases}$$

Solution.

Exercice 5

Exercice. Dans le plan affine euclidien orienté P, muni d'un repére cartésien orthonormé R, on considŕe les trois droites

$$D_1 : x + 2y - 1 = 0\ ,\quad D_2 : x + y - 2 = 0\ ,\quad D_3 : 3x - y = 0$$

(a) Déterminer les formules analytiques des trois réflexions σ_{D_1}, σ_{D_2} , σ_{D_3}.

(b) Déterminer la nature et les éléments de $f = \sigma_{D_1} \circ \sigma_{D_2} \circ \sigma_{D_3}$.

Solution.

Exercice 6

Exercice. Dans l'espace affine euclidien orienté E ($\dim E = 3$), muni d'un repére cartésien orthonormé R, on considére l'application f de E dans lui-même, définie par ses formules analytiques, $f(x, y, z) = (x', y', z')$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z' = \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z + 1 \end{cases}$$

Déterminer la nature et les éléments de f.
Même question avec g définie par

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 1 \\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Solution.