Géométrie 2

L3 Mathématiques 2020/21, TD10

Leonardo Colò

X seance, 29 Mars 2021

Exercice 1

Exercice. Soit $\{A, B, C\}$ un triangle et I le milieu de $\{B, C\}$. Montrer que le triangle $\{A, B, C\}$ est isoscéle en A si et seulement si le triangle $\{A, B, I\}$ est rectangle en I.

Solution.

Exercice 2

Exercice. Montrer qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si les diagonales sont perpendiculaires et que c'est un rectangle si et seulement si les diagonales ont même longueur.

Solution.

Exercice 3

Exercice. Soit (P, Q, R, S) un parallélogramme, D la droite passant par P et paralléle á (QS), E la droite passant par Q et paralléle á (PR), F la droite passant par R et paralléle á (QS) et enfin G la droite passant par S et parall éle á (PR). Soient

$$P = D \cap E,\ Q' = E \cap F,\ R' = F \cap G,\ S' = G \cap D$$

Montrer que (P', Q', R', S') est un parallélogramme, que c'est un losange si et seulement si (P, Q, R, S) est un rectangle et réciproquement. Enfin, montrer que l'un est un carré si et seulement si l'autre est un carré.

Solution.

Exercice 4

Exercice. Montrer que des droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

Solution.

Exercice 5

Exercice. Soit D une droite dirigée par $u(1, 2, 3)$. Déterminer une équation du plan perpendiculaire à D passant par le point de coordonnées $(2, 3, 5)$.

Solution.

Exercice 6

Exercice. Soit H le plan passant par les points de coordonnées $(1, -2, 1)$, $(0, 1, 2)$ et $(1, 3, 4)$. Déterminer un vecteur directeur de la droite D perpendiculaire à H passant par le point de coordonées $(5, 1, 3)$. Donner une présentation paramétrique de D.

Solution.

Exercice 7

Exercice. Parmi les plans d'équations

$$4x + 2y - 4z + 5 = 0 \ , \quad 2x + y + 2z - 1 = 0 \ , \quad 3x - y - 2z - 5 = 0$$

$$x + 9y - 3z + 2 = 0 \ , \quad x - 3z + 2 = 0 \ , \quad 2x - 6z - 7 = 0$$

lesquels sont paralléles ou perpendiculaires ?

Solution.

Exercice 8

Exercice. Soient D la droite d'équation $x+y+1=0$ et $P \equiv (1,1)$. Calculer $d(P,D)$, la distance de P à D. Même question pour $D_1 : 2x+3y-4=0$ et $P_1 \equiv (2,3)$.

Solution.

Exercice 9

Exercice. Quelle est la distance du point $P \equiv (1,1,1)$ à la droite passant par le point de coordonnées $(-1,2,3)$ et dirigée par le vecteur $(2,-1,2)$?

Solution.

Exercice 10

Exercice. Soit D l'intersection des plans d'équations $x+y+z=2$ et $2x-3y+z=3$. Quelle est la distance du point $P \equiv (1,-1,1)$ à D?

Solution.

Exercice 11

Exercice. Dans chacun des cas suivants, après avoir vérifié que les deux droites $\mathscr{r}$ et ℓ dans $\mathbb{R}^3$ ne sont pas coplanaires, trouver la distance et la perpendiculaire commune:

1. $\mathscr{r} : 2x - y - z - 1 = x + y - 2z = 0, \qquad \ell : 2x + y - z + 2 = x + 3z - 2 = 0$

2. $\mathscr{r} : x + y - 3 = 2x - z + 1 = 0, \qquad \ell : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ +3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Solution.

Exercice 12

Exercice. Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repèreor thonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère trois points de E, A, B et C de coordonnées respectivement $(1, -1, 0)$, $(2, 1, -3)$ et $(0, 2, -1)$ dans ce repère.

a Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

b Décrire l'ensemble des points équidistants de A et de B.

c Décrire l'ensemble des points équidistants de A, de B et de C.

d Si D est le point $(1, 1, 1)$, décrire l'ensemble des points équidistants de A, B, C et D.

Solution.

Exercice 13

Exercice. Soient A, B et C 3 points du plan affine euclidien (P).

a Montrer qu'il existe un point G unique tel que : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = O$.

b Soit f l'application de (P) dans $\mathbb{R}$ qui au point M associe le réel:

$$f(M) = 2||\overrightarrow{MA}||^2 + ||\overrightarrow{MB}||^2 - ||\overrightarrow{MC}||^2$$

montrer que $f(M) = f(G) + 2||\overrightarrow{MG}||^2$ et en deduire que f admet un minimum absolu G (c'est-à-dire si M est dans (P) alors: $M \neq G$ implique $f(M) > f(G)$).

c Déterminer les coordonnées de G et calculer $f(G)$ lorsque (P) est rapporté à un repère orthonormé $R' = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et A, B et C sont de coordonnées respectivement $(1, 1)$, $(-1, 2)$ et $(-3, -4)$ dans ce repère.

Solution.

Exercice 14

Exercice. Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 et $ABCD$ un parallélogramme de E (A, B, C, D sont des points vérifiant la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$). Montrer que

$$||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{BC}||^2 + ||\overrightarrow{CD}||^2 + ||\overrightarrow{DA}||^2 = ||\overrightarrow{AC}||^2 + ||\overrightarrow{BD}||^2$$

Solution.