Géométrie 2

L3 Mathématiques 2020/21, TD8

Leonardo Colò

VIII seance, 16 Mars 2021

Exercice 1

Exercice. Soit $T = \{A, B, C\}$ un triangle et A', B' et C' situés sur les cotés opposés à A, B et C, respectivement. Montrer que T et $\{A', B', C'\}$ ont même centre de gravité si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$A' = \lambda B + \mu C \qquad B' = \lambda C + \mu A \qquad C' = \lambda A + \mu B$$

Les points A', B' et C' peuvent ils être alignés ?

Solution.

Exercice 2

Exercice. Dans un plan, soient I le milieu de $\{A, B\}$ et I' le milieu de $\{A', B'\}$. Montrer que si $A' \neq A$ et $B' \neq B$, alors les droites (AA'), (BB') et (II') sont paralléles ou concourantes.

Solution.

Exercice 3

Exercice. Dans le plan affine, on considère trois points non alignés, A, B, C constituant un repère affine. On choisit trois points A', B', C' appartenant respectivement aux droites (BC), (AC), et (AB), les points A, B, C étant exclus. On suppose donc que la matrice représentant les points A', B', C' dans le repère est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & 1-\gamma \\ 1-\alpha & 0 & \gamma \\ \alpha & 1-\beta & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que les droites (AA') et (BB') se coupent en un point unique M.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β et γ pour que les droites (AA'), (BB') et (CC') se coupent en un point unique M.

(c) On suppose que la condition **b** est réalisée. Exprimer $\dfrac{\overline{A'M}}{\overline{A'A}}$ en fonction de α, β et γ et en déduire le théorème de Gergonne:

$$\frac{\overline{A'M}}{\overline{A'A}} + \frac{\overline{B'M}}{\overline{B'B}} + \frac{\overline{C'M}}{\overline{C'C}} = 1$$

Solution.

Exercice 4

Exercice. Soit P un plan affine rapporté à un repère (O, e_1, e_2), soient D et D' les droites d'équation $x + y = 2$, $3x - y = 3$, et soit s la symétrie par rapport D parallèlement à D'

(a) Déterminer les équations des sous espaces $\tilde{D}$ et $\tilde{D}'$ associés à D et D' dans l'espace universel $\hat{P}$ dans la base (O, e_1, e_2) de $\hat{P}$.

(b) Déterminer par sa matrice dans la base (O, e_1, e_2) l'endomorphisme $\tilde{s}$ de $\hat{P}$ associé à s.

(c) Que peut-on dire de l'endomorphisme de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

dans la base (O, e_1, e_2)?

.

Solution.

Exercice 5

Exercice. Soient D et P une droite et un plan sécants inclus dans l'espace affine E de dimension 3. Àtout point M de l'espace, on associe la droite (resp. le plan) passant par M et parallèle à D (resp. à P) et on note M' (resp. M'') l'intersection de cette droite (resp. plan) avec le plan P (resp. droite D).

1. Soit A un point de l'espace.

- **(a)** Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que A soit le milieu de M' et M''.
- **(b)** Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que A soit l'isobarycentre des points M, M' et M''.
- **(c)** Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que A, M et M' soient alignés.

2. Soit Q un plan de l'espace. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que la droite contenant M' et M'' soit parallèle à Q.

3. Soit Δ une droite de l'espace. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que la droite contenant M' et M'' soit parallèle à Δ.

Solution.

Exercice 6

Exercice. Démontrer le théorème de Ceva : Si A, B, C forment un repère affine et

$$A' \equiv (a_1, a_2, a_3) \qquad B' \equiv (b_1, b_2, b_3) \qquad C' \equiv (c_1, c_2, c_3)$$

distincts de A, B, C de coordonnées respectives, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$a_2 b_3 c_1 = a_3 b_1 c_2.$$

Solution.

Exercice 7

Exercice. Montrer que si A, B et C forment un repère affine et

$$D : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

est une droite, alors

$$D \parallel (AB) \text{ si et seulement si } \alpha = \beta$$

En déduire que si

$$A' \equiv (a_1, a_2, a_3) \neq B' \equiv (b_1, b_2, b_3),$$

alors

$$(AB) \parallel (A'B') \text{ si et seulement si } a_3 = b_3$$

Solution.

Exercice 8

Exercice. Soient A, B, C, A', B', C' tous distincts tels que

$$(AB) \parallel (B'C) \parallel (C'A') \quad \text{et} \quad (AC) \parallel (C'B) \parallel (B'A').$$

Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.

Solution.

Exercice 9

Exercice. Démontrer le théorème de Ménélaüs : si A, B, C forment un repère affine et

$$A' \equiv (a_1, a_2, a_3) \qquad B' \equiv (b_1, b_2, b_3) \qquad C' \equiv (c_1, c_2, c_3)$$

avec

$$A' \in (BC) \qquad B' \in (AC) \qquad C' \in (AB)$$

alors A', B', C' sont alignés si et seulement si

$$a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 = 0$$

Solution.