Géométrie 2

L3 Mathématiques 2020/21, TD5

Leonardo Colò

V seance, 16 Fevrier 2021

Exercice 1

Exercice. **a.** Soit p une projection vectorielle de l'espace vectoriel $\vec{E}$. On considère l'endomorphisme q de $\overrightarrow{E}$ défini par $q = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}} - p$. Montrer que q est une projection vectorielle dont on déterminera les invariants en fonction de ceux de p. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0_{\overrightarrow{E}}$

b. Soient p et p' deux projections vectorielles de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$. Montrer que $p + p'$ est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p' = p' \circ p = 0_{\overrightarrow{E}}$. Déterminer, dans ce cas, les invariants de $p + p'$ en fonction de ceux de p et ceux de p'.

c. Montrer qu'un endomorphisme ϕ de l'espace vectoriel de dimension finie $\overrightarrow{E}$ est un projecteur si et seulement si ϕ est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\{0, 1\}$. En déduire que $E = \ker(\phi) \oplus \ker(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}} - \phi)$ si et seulement si ϕ est une projection vectorielle.

Solution.

Exercice 2

Exercice. Soit A un point et f l'application qui envoie $M \in E$ sur le milieu de $\{A, M\}$. Montrer que f est une homothétie dont on déterminera les invariants (les éléments caracteristiques).

Solution.

Exercice 3

Exercice. Soient f et g deux dilatations. Déterminer les invariants (les éléements caracteristiques) de $g \circ f$ (vecteur de translation ou centre et rapport) en fonction de ceux de f et de g.

Solution.

Exercice 4

Exercice. Soit D une droite affine sur $\mathbb{R}$ et $f : D \to D$ une application affine distincte de l'identité telle que pour tout point $M \in D$, $(f \circ f)(M)$ soit le milieu de $\{M, f(M)\}$. Montrer que f est une homothétie dont on déterminera le rapport.

Solution.

Exercice 5

Exercice. Soit E un espace affine de dimension finie et f un endomorphisme affine de E. Montrer que f possède un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

Solution.