Géométrie 2

L3 Mathématiques 2020/21, TD4

Leonardo Colò

IV seance, 9 Fevrier 2021

Exercice 1

Exercice. Montrer que toute application affine dont la partie linéaire est la fonction nulle, est une application constante.

Solution.

Exercice. Montrez que si f est une application affine d'application linéaire associée l'identité de $\overrightarrow{E}$, alors f est une translation.

Solution.

Exercice 2

Exercice. Soient $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine et f une application affine de E dans E. On note F l'ensemble des points fixes de F (c'est-à-dire $F = \{M \in E \mid f(M) = M\}$).

(i) Montrer que F est soit vide soit une sous-espace affine de E dont on précisera la direction.

(ii) Soit Φ l'application de E dans $\overrightarrow{E}$, qui à un point M associe le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$. Montrer que Φ est une application affine et donner l'application linéaire associée.

Solution.

Exercice 3

Exercice. On dit qu'une application $s : E \to E$ est une symètrie si $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Montrer qu'une application affine s est une symètrie si et seulement si l'ensemble $F = \{x \in E \mid s(x) = x\}$ des points fixes de s est non vide et $\overrightarrow{s}$ est une symètrie vectorielle.

Solution.

Exercice 4

Exercice. Montrer que si s est une symètrie, alors l'application p qui à P associe le milieu de $\{P, s(P)\}$ est une projection et que

$$\overrightarrow{p} = \frac{\overrightarrow{s} + \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}}{2}$$

Solution.

Exercice 5

Exercice. Soit H un plan affine rapporté à un repére cartéesien. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et soit l'application f donnée par

$$\begin{aligned} f : H &\longrightarrow H \\ (x, y) &\longrightarrow \left(ay + b, \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

Montrer que f est une symètrie dont on déterminera les invariants (les éléments caracteristiques).

Solution.

Exercice 6

Exercice. Soit X un espace affine de dimension 3 et $R = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère cartésien de X. Soit f l'application affine de X dans X qui à (x, y, z) associe (x', y', z') vérifiant les relations :

$$\begin{cases} x' = -4x - 2y + z - 7 \\ y' = x - y - z - 1 \\ z' = -3x - 6y - 9 \end{cases}$$

(i) Vérifier que f est une bijection de X dans X

(ii) Montrer que f admet une droite de points fixes que l'on note D.

Solution.