Géométrie 2

L3 Mathématiques 2020/21, TD2

Leonardo Colò

II seance, 26 Janvier 2021

Exercice 1

Exercice. Déterminer lesquels des trois points suivants sont alignés dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{\left(\frac{1}{2},2\right)\ ,\ \left(\frac{1}{2},100\right),\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$\{(1,1,)\ ,\ (1,-1)\ ,\ (-1,1)\}$$
$$\left\{\left(\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right)\ ,\ \left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{5},\frac{6}{5}\right)\right\}$$

Solution.

Exercice 2

Exercice. Déterminer le sous-espace affine engendré par deux droites affines dans un espace affine de dimension finie.

Solution.

Exercice. Trouver un système d'équations cartésiennes du sous-espace affine engendré dans $\mathbb{R}^4$ par les deux droites

$$d = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \delta = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Solution.

Exercice. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on considère les droites D et D' d'équations :

$$D = \begin{cases} 2x + 3y - 4z = -1 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases} \qquad D' = \begin{cases} 11x - y - 7z = \alpha \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

(i) Les droites sont-elles parallèles, sécantes ou non-coplanaires ?

(ii) Pouvez-vous donner un système d'équations de D comprenant une des équations données pour D'?

(iii) Donner un système d'équations cartésiennes du sous-espace affine engendré dans $\mathbb{R}^3$ par les deux droites.

Solution.

Exercice 3

Exercice. Donner des équations pour la droite $D \subset \mathbb{R}^3$ passant par $P \equiv (1, 2, 3)$ et $Q \equiv (2, 0, 1)$. Donner aussi des équations pour $\overrightarrow{D}$.

Solution.

Exercice 4

Exercice. Trouver les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesqueslles le point $M \equiv (1, a, b) \in \mathbb{R}^3$ est sur la droite passant par $P \equiv (0, 1, 0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$.

Solution.

Exercice 5

Exercice. Donner des équations pour la droite $D \subset \mathbb{R}^2$ passant par $P = \ell_1 \cap \ell_2$ et $Q = \ell_3 \cap \ell_4$ ou $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \subset \mathbb{R}^2$ sont les droites d'équation

$$\ell_1 : x + 5y - 8 = 0 \qquad \ell_2 : 3x + 6 = 0 \qquad \ell_3 : 5x - \frac{y}{2} = 1 \qquad \ell_4 : x - y = 5$$

Solution.

Exercice 6

Exercice. Dans l'espace affine de dimension 3, on considère quatre points non coplanaires A, B, C et D. On note M_1 le milieu de AB, M_2 le milieu de BC, M_3 le milieu de CD et M_4 le milieu de DA.
Montrer que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont dans un même plan.
Que peut-on dire des milieux de AC et de BD?

Solution.

Exercice 7

Exercice. Soient $P \equiv (2,3) \in \mathbb{R}^2$ et $Q \equiv (11, -\sqrt{5}) \in \mathbb{R}^2$. Trouver le points qui divisent le segment $\{P, Q\}$ en 4 partie égales.

Solution.

Exercice 8

Exercice. Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ la droite passant par $P \equiv (0,1,0)$ dirigée par $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$. De même, soit $D' \subset \mathbb{R}^3$ la droite passant par $P' \equiv (1,1,1)$ dirigée par $\overrightarrow{u}' = (a,1,b)$. Déterminer en fonction de a et b les positions respectives de D et D'.

Solution.

Exercice 9

Exercice. Montrer que la droite $D \subset \mathbb{R}^3$ qui passe par $A \equiv (4, 9, 4)$ et $B \equiv (13, -3, 7)$ rencontre la droite d'équations

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{9} = \frac{z-1}{4}$$

Solution.

Exercice 10

Exercice. Donner une équation pour le plan $H \subset \mathbb{R}^3$ passant par $P \equiv (1, 2, 1)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u} = (0, 3, 1)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 0, 2)$. Donner aussi une équation pour $\overrightarrow{H}$.

Solution.

Exercice 11

Exercice. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ non-nuls. Donner une équation pour le plan $H \subset \mathbb{R}^3$ qui coupe les axes en $(a, 0, 0)$,$(0, b, 0)$ et $(0, 0, c)$. Donner aussi une équation pour $\overrightarrow{H}$.

Solution.

Exercice 12

Exercice. Donner une équation pour le plan $H \subset \mathbb{R}^3$ qui passe par $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 5)$ et $(4, 3, 1)$. Donner aussi une équation pour $\overrightarrow{H}$.

Solution.

Exercice 13

Exercice. Dans chacun des cas suivants, donner des équations pour le plan $H \subset \mathbb{C}^3$ qui passe par P et parallèle au plan Π:

(i) $P \equiv (-1, 2, 2), \qquad \Pi : x + 2y + 3z + 1 = 0;$

(ii) $P \equiv (i, i, i), \qquad \Pi : 2x - y = 0;$

(iii) $P \equiv (i, i, i + 1), \qquad \Pi : iy - 2z + 3i + 10 = 0;$

(iv) $P \equiv (1 - 2i, 1, \pi i), \qquad \Pi : iy = 3.$

Solution.

Exercice 14

Exercice. Dans chacun des cas suivants, verifier si les droites ℓ_1 et ℓ_2 dans $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires et, dans le cas où ils le sont, donner des équations pour le plan qui les contient

(i) $\ell_1 : x = 1 + t,\ y = -t,\ z = 2 + 2t, \qquad \ell_2 : x = 2 - t,\ y = -1 + 3t,\ z = t;$

(ii) $\ell_1 : 2x + y + 1 = y - z - 2 = 0, \qquad \ell_2 : x = 2 - t,\ y = 3 + 2t,\ z = 1;$

(iii) $\ell_1 : 2x + 3y - z = 5x + 2z - 1 = 0, \qquad \ell_2 : 3x - 3y + 3z - 1 = 5x + 2z + 1 = 0;$

(iv) $\ell_1 : 2x + z - 1 = y - z + 1 = 0, \qquad \ell_2 : 2x - y + 3z = 2x + y - 3 = 0;$

(v) $\ell_1 : x + 1 = z - 2 = 0, \qquad \ell_2 : 2x + y - 2z + 6 = y + z - 2 = 0.$

Solution.

Exercice 15

Exercice. Soient $m, p \in \mathbb{R}$. Montrer que les plans d'équations

$$mx - (2m+1)y + (m+3)z - 2 = 0$$

et

$$4x + (m-12)y + 2pz - 4 = 0$$

se rencontrent dans $\mathbb{R}^3$.

Solution.

Exercice 16

Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ distincts non-nuls avec $|a| \neq |b|$. Donner une équation de la droite $D \subset \mathbb{R}^2$ passant par $P \equiv (a, b)$ et par l'intersection des droites d'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

et

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

Solution.

Exercice 17

Exercice. Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine de dimension 2 muni d'un repère cartésien $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On considère quatre droites d, d', δ, δ' d'équations respectives

$$d : ax+by+c = 0 \quad d' : a'x+b'y+c' = 0 \quad \delta : ux+vy+w = 0 \quad \delta' : u'x+v'y+w' = 0$$

On suppose que d et d' sont sécantes en un point I et que δ et δ' sont sécantes en un point J. On suppose que $I \neq J$, donner une équation de la droite (IJ).

Solution.

Exercice 18

Exercice. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit E_a l'ensemble des matrices dans la base canonique des applications linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ qui trasforment le vecteur $(1, 1)$ en vecteur $(-a, 0)$.

(i) Montrer que E_a est un sous-espace affine de $M_2(\mathbb{R})$ et en donner un point et une base de son espace directeur.

(ii) Soit $F = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 1\}$, et soit $D_a = F \cap E_a$. Montrer que D_a est un sous-espace affine de $M_2(\mathbb{R})$ et en donner un point et une base de son espace directeur. Calculer $\dim(D_a \cap E_a)$ et $\dim\langle D_a, E_a\rangle$ (l'éspace engendré par D_a et E_a) comme fonctions de $a \in \mathbb{R}$.

Solution.