Géométrie 2

L3 Mathématiques 2020/21, TD1

Leonardo Colò

I seance, 19 Janvier 2021

Exercice 1

Exercice. Montrer que les définitions suivantes sont équivalentes.

Definition A. *Soit E un ensemble non vide. On dit que E est un espace affine sur $\vec{E}$ lorsqu'il existe une loi de composition externe (noté +) de $E \times \overrightarrow{E}$ vers E qui vérifie*

(i) $\forall A \in E,\ A + \overrightarrow{0} = A$;

(ii) $\forall A \in E,\ \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E},\ (A + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = A + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$;

(iii) $\forall A \in E$, *l'application* $\psi_A : \overrightarrow{E} \to E$, $\overrightarrow{u} \to A + \overrightarrow{u}$ *est une bijection.*

Definition B. *Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel sur K et soit E un ensemble non vide. On dit que la couple (E, e) où e est une application $E \times E \to \overrightarrow{E}$ tel que*

(i) $\forall A \in E,\ \forall x \in \overrightarrow{E}$, *il existe un seul $B \in E$ tel que $e(A, B) = x$;*

(ii) $\forall A, B, C \in E,\ e(A, B) + e(B, C) = e(A, C)$.

est un espace affine associé à $\vec{E}$.

Definition C. *Un espace affine est la donnée d'un couple $(E, \overrightarrow{E})$, où E est un ensemble non vide et $\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel, et d'une application de $E \times E$ dans $\overrightarrow{E}$ qui à (x, y) associe le vecteur $\overrightarrow{xy}$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Pour tous x, y et z dans E on a $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$;*

(ii) *Pour tout x dans E l'application ψ_x qui à $x \in E$ associe le vecteur $\overrightarrow{xy}$ est une bijection de E sur $\overrightarrow{E}$.*

Definition D. *Un espace affine sur K est une action de groupe transitive et fidèle $(E, \overrightarrow{E}, \Phi)$ où $\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel sur K et $\Phi : E \times \overrightarrow{E} \to E$ est dit translation.*

Solution.

Exercice 2

Exercice. Soit E un espace affine, $\overrightarrow{E}$ son espace vectoriel associé. Montrer que pour tous $A, B, C, D \in E$,on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Solution.

Exercice. Soient A et B deux points de E. Montrer que, pour un point C de E, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \qquad \text{et} \qquad 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$$

Montrer qu'un tel point existe et est unique, on l'appellera milieu de $\{A, B\}$.

Solution.

Exercice. Montrer que, pour quatre points A, B, C et D les propriétés suivantes sont équivalentes:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ et Les milieux de $\{A, D\}$ and $\{C, B\}$ coïncident.

Solution.

Exercice 3

Exercice. On pose
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 = 0\}$$
Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, (x, y)) &\longrightarrow (x + \lambda, y - \lambda) \end{aligned}$$
est bien définie et fait de E un espace affine.

Solution.

Exercice 4

Exercice. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ (\lambda, P) &\longrightarrow Pe^{\lambda} \end{aligned}$$

fait de $\mathbb{R}_{>0}$ un espace affine.

Solution.

Exercice 5

Exercice. Soit X un espace affine de dimension n sur un corp fini commutatif K de cardinal k. Calculer la cardinalité de X.

Solution.

Exercice. Plus généralement, combien sont-ils les susespaces affines de X de dimension $0 \leqslant m \leqslant n$?

Solution.

Exercice 6

Exercice. Soient E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à n, E_1 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)dt = 1$et E_0 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

a. Montrer que E et E_0 sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension fini.

b. Soient f et g dans E_1. Les éléments $f+g$, $f-g$, $\frac{f+g}{2}$ sont-ils dans E_1, dans E_0?

c. Montrer que E_1 peut-être muni d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent E_0.

Solution.

Exercice 7

Exercice. **a.** On considère un système linéaire de n équations à n inconnues. Montrer que l'ensemble des solutions de ce système est un espace affine associé à un espace vectoriel que l'on précisera.

b. On considère l'équation différentielle ci-dessous :

$$y'' + 2y' + y = e^{2x}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de cette équation est un espace affine associé à un espace vectoriel que l'on précisera.

c. On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1 (c'est le cercle unité). On définit la loi externe $\Phi : U \times \mathbb{R} \to U$ qui à un réel t et z dans U associe $\Phi(t, z) = ze^{it}$. Montrer que Φ est transitive et ne définit pas une structure d'espace affine sur U.

Solution.

Exercice 8

Exercice. La partie $\mathbb{R}_{>0}$ de $\mathbb{R}$ est elle un sous-espace affine?

Solution.

Exercice 9

Exercice. Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine. On considère trois points A, B, C.

a. Montrer que l'application f de E dans $\overrightarrow{E}$ qui à M dans E associe le vecteur $f(M) = 5\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est constante.

b. Plus généralement si a, b, c sont des scalaires tels que $a + b + c = 0$ alors l'application f de E dans $\overrightarrow{E}$ qui à M dans E associe $f(M) = a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$ est constante.

Solution.

Exercice 10

Exercice. Soient $P \equiv (a, b, c)$ et $Q \equiv (a', b', c')$ deux points distincts de $\mathbb{R}^3$ et soit $D = (PQ)$ l'unique droite passant par P et Q. Déterminer un vecteur directeur de $\overrightarrow{D}$.

Solution.

Exercice 11

Exercice. Soit H le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$. Déterminer une base de H.

Solution.

Exercice 12

Exercice. Soient E l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ et $a, b \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$F = \{f \in E \mid f(0) = a,\ f(1) = b\}$$

est un sous-espace affine de E.

Solution.

Exercice 13

Exercice. Soit F une partie non-vide d'un espace affine E. Montrer que F est un sous-espace affine de E si et seulement si $\forall P \neq Q \in F$, $(PQ) \subset F$.

Solution.

Exercice 14

Exercice. **(i)** Dans l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{R}$, on considère le sous-ensemble

$$V = \left\{ A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 0,\ \forall 1 \leqslant j \leqslant n,\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 0 \right\}$$

Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est la dimension de V?

(ii) On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure canonique d'espace affine. Posons

$$F = \left\{ A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1,\ \forall 1 \leqslant j \leqslant n,\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1 \right\}$$

Montrer que F est un sous-espace affine de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont on précisera la direction.

Solution.