DM 1 corrigé

Si vous avez de commentaires/questions ou si vous trouvez des erreurs, n'hésitez pas a m'écrire :

leonardo.COLO@univ-amu.fr

Exercice 1. Soient $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ deux espaces vectoriels et soit $T : \overrightarrow{V} \to \overrightarrow{W}$ une application linéaire. Soit $\overrightarrow{\omega} \in \overrightarrow{W}$.

(i) Pour que l'ensemble $T^{-1}(\overrightarrow{\omega})$ soit un sous-espace affine, il faut qu'il soit non vide, i.e., $\overrightarrow{\omega} \in \operatorname{Im}(T)$.

(ii) Supposons que $T^{-1}(\overrightarrow{\omega}) \neq \emptyset$. Soient $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2 \in T^{-1}(\overrightarrow{\omega})$; on a

$$T(\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2) = T(\overrightarrow{v}_1) - T(\overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{\omega} - \overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2 \in \ker(T)$.
Reciproquement, si $\overrightarrow{v} \in T^{-1}(\overrightarrow{\omega})$ et $\overrightarrow{y} \in \ker(T)$,

$$T(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{y}) = T(\overrightarrow{v}) + T(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{\omega}$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{y} \in T^{-1}(\overrightarrow{\omega})$.
Nous pouvons conclure que $T^{-1}(\overrightarrow{\omega})$ est un sous-espace affine de $\overrightarrow{V}$ (avec la structure canonique d'espace affine) de direction $\ker(T)$.

Exercice 2. Il suffit de considérer les plans

$$\Pi_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui ont équations cartésiennes

$$\Pi_1 : z = w = 0 \qquad \Pi_2 : x = y = 0$$

Clairement

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 3. Soient λ la droite passant par les points $P_0 = (1, 1, 0, 0)$ et $P_1 = (0, 0, 3, 1)$

$$\lambda : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec équations cartésiennes} \quad \begin{cases} x = y \\ y + w - 1 = 0 \\ z - 3w = 0 \end{cases}$$

et θ_ℓ la droite qui passe par les points $Q_0 = (\ell, \ell, \ell - 3, \ell - 3)$ et $Q_1 = (-1, -1, \ell + 3, \ell - 1)$ en fonction de $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\theta_\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell \\ \ell \\ \ell - 3 \\ \ell - 3 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} \ell + 1 \\ \ell + 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{avec équations cartésiennes} \quad \begin{cases} x = y \\ 2y + w(\ell + 1) = \ell^2 - 3 \\ z - 3w = 6 - 2\ell \end{cases}$$

(i) Commençons par étudier l'intersection de λ avec θ_ℓ : On trouve le système

$$\begin{cases} x = y \\ y + w - 1 = 0 \\ z - 3w = 0 \\ x = y \\ 2y + w(\ell + 1) = \ell^2 - 3 \\ z - 3w = 6 - 2\ell \end{cases} \qquad \text{équivalent à} \qquad \begin{cases} x = y \\ y + w - 1 = 0 \\ z - 3w = 0 \\ 2y + w(\ell + 1) = \ell^2 - 3 \\ z - 3w = 6 - 2\ell \end{cases}$$

La matrice associée est

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6-2\ell \\ 0 & 2 & 0 & \ell+1 & \ell^2-3 \end{array}\right)$$

On étudie son rang

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6-2\ell \\ 0 & 2 & 0 & \ell+1 & \ell^2-3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 6-2\ell \\ 2 & 0 & \ell+1 & \ell^2-3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 6-2\ell \\ 0 & \ell+1 & \ell^2-3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 6-2\ell \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 6-2\ell \\ 0 & \ell+1 & \ell^2-3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 6-2\ell \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 6-2\ell \\ \ell+1 & \ell^2-3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ \ell+1 & \ell^2-3 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 6-2\ell \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (9 - 3\ell^2 - 6\ell - 6 + 2\ell^2 + 2\ell) - (9 - 3\ell^2) + 2(6 - 2\ell - 3) - 2(-3) =$$

$$= 9 - 3\ell^2 - 6\ell - 6 + 2\ell^2 + 2\ell - 9 + 3\ell^2 + 12 - 4\ell - 6 + 6 =$$

$$= 2\ell^2 - 8\ell + 6 = 2(\ell^2 - 4\ell + 3) = 2(\ell - 1)(\ell - 3)$$

Donc, si $\ell \neq 1, 3$, le rang de la matrice augmentée est 5 et le rang de la matrice homogène est strictement inférieure à 5. Donc le système est incompatible et $\lambda\theta_\ell = \emptyset$.
Si $\ell = 3$ on obtien le système

$$\begin{cases} x = y \\ y + w - 1 = 0 \\ z - 3w = 0 \\ x = y \\ 2y + 4w = 6 \\ z - 3w = 0 \end{cases} \qquad \text{équivalent à} \qquad \begin{cases} x = y \\ y + w - 1 = 0 \\ z - 3w = 0 \\ 2y + 4w = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y + w - 1 = 0 \\ z - 3w = 0 \\ 2y + 4w = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ y = 1 - w \\ z = 3w \\ 2 - 2w + 4w = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ y = 1 - w \\ z = 3w \\ w = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 6 \\ w = 2 \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\lambda \cap \theta_3 = \{P \equiv (-1, -1, 6, 2)\}$.
Finalement, si $\ell = 1$

$$\theta_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \lambda : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On note que $\vec{\theta}_1 = \vec{\lambda} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$, i.e., $\theta_1 \parallel \lambda$ mais $\theta_1 \cap \lambda = \emptyset$ parce que $P_0 \notin \theta_1$.

On remarque également que, pour $\ell \in \mathbb{R}$, $\lambda \parallel \theta_\ell \iff \vec{\theta}_\ell = \vec{\lambda} \iff \exists a \in \mathbb{R}$ tel que

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell + 1 \\ \ell + 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = \ell + 1 \\ a = \ell + 1 \\ -3a = -6 \\ -a = -2 \end{cases} \iff a = 2 \text{ et } \ell = 1$$

En conclusion,
— Si $\ell = 1$ λ et θ_1 sont parallèles ;
— Si $\ell = 3$ λ et θ_3 sont sécantes ;
— Si $\ell \neq 1, 3$ λ et θ_ℓ ne sont pas coplanaires.

(ii) Si $\ell = 1$, $\Omega_1 = \mathrm{Aff}(\lambda, \theta_1)$ est un plan (de dimension 2) avec équations

$$\Omega_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ou le vecteur $(0, 0, 2, 2)$ est le vecteur $\overrightarrow{Q_0 P_0}$. Les équations cartésiennes sont

$$\begin{cases} x = y \\ x = 1 + t \\ z = -3x + 3 + 2t' \\ w = -x + 1 + 2t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x = 1 + t \\ 2t' = w + x - 1 \\ z + 3x - 3 = w + x - 1' \end{cases} \implies \Omega_1 : \begin{cases} x = y \\ 2x + z - w - 2 = 0 \end{cases}$$

Si $\ell = 3$, $\Omega_3 = \mathrm{Aff}(\lambda, \theta_3)$ est un plan (de dimension 2) avec équations

$$\Omega_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

avec espace directeur $\overrightarrow{\Omega_3} = \langle \overrightarrow{\lambda}, \overrightarrow{\theta_3} \rangle$ et origine $\lambda \cap \theta_3$. Les équations cartésiennes sont

$$\begin{cases} x = -1 + t + 4t' \\ y = -1 + t + 4t' \\ z = 6 - 3t - 6t' \\ w = 2 - t - 2t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ t = x + 1 - 4t' \\ z = 6 - 3x - 3 + 12t' - 6t' \\ w = 2 - x - 1 + 4t' - 2t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ 3x + z - 3 = 6t' \\ x + w - 1 = 2t' \end{cases}$$

$$\implies \Omega_3 : \begin{cases} x = y \\ z - 3w = 0 \end{cases}$$

Finalement, si $\ell \neq 1, 3$, Ω_ℓ a dimension 3 et équation

$$\Omega_\ell : x = y$$

(iii) En utilisant les équations décrites dans le point **ii** on peut conclure

$$0 \in \Omega_\ell \iff \ell \neq 1$$

(iv) Soient Λ le plans passant par O et contenant la droite λ

$$\Lambda : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec équations cartésiennes} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ z - 3w = 0 \end{cases}$$

et Θ le plans passant par O et contenant la droite θ_1

$$\Theta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{avec équations cartésiennes} \quad \begin{cases} x = y \\ 4x + z + w = 0 \end{cases}$$

On étudie l'intersection

$$\Lambda \cap \Theta : \begin{cases} x - y = 0 \\ z - 3w = 0 \\ 4x + z + w = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = x \\ z = -3x \\ w = -x \end{cases}$$

et donc $\Lambda \cap \Omega$ a dimension 1 et équations

$$\Lambda \cap \Theta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \Lambda \cap \Theta : \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ x + w = 0 \end{cases}$$

Exercice 4. Première méthode. A mano. On va calculer les affixes de tous les points, et trouver explicitement les coordonnées du point d'intersection cherché. Une étape à ne jamais négliger est de se placer dans un repère qui facilite les calculs. Pour être en phase avec le dessin, on se place dans le repère (C, B, A), donc $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notons $P = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Puisque P est à l'intérieur du triangle ABC, on $0 < \alpha, \beta < 1$. On a donc

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta - 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

On déduit que pour trois réels a, b, c, les équations des droites (AP), (BP), (CP) sont respectivement

$$(AP) : (1 - \beta)x + \alpha y = a, \quad (BP) : \beta x - \alpha y = b, \quad (CP) : \beta x + (1 - \alpha)y = c.$$

En fixant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A, B, C$ successivement on trouve $a = \alpha$, $b = 0$, $c = \beta$.

L'intersection $A' = (AP) \cap (BC)$ se trouve en posant $y = 0$ dans l'équation de (AP) : on obtient $A' = \begin{pmatrix} \alpha/(1 - \beta) \\ 0 \end{pmatrix}$. De même, en posant $x = 0$ dans l'équation de (CP), on trouve $C' = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta/(1 - \alpha) \end{pmatrix}$. Enfin, la droite (AC) est d'équation $x + y = 1$, donc les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de B' sont les solutions du système

$$\begin{cases} \beta x - \alpha y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases},$$

et l'on trouve $B' = \begin{pmatrix} \alpha/(\alpha + \beta) \\ \beta/(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$. On obtient donc

$$A'' = B + \overrightarrow{A'C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha/(1 - \beta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \alpha - \beta)/(1 - \beta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De même, $C'' = \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - \alpha - \beta)/(1 - \alpha) \end{pmatrix}$. Enfin, on a

$$B'' = A + \overrightarrow{B'C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha/(\alpha + \beta) \\ \beta/(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta/(\alpha + \beta) \\ \alpha/(\alpha + \beta) \end{pmatrix}.$$

On trouve ensuite les équations des droites (AA''), (BB'') et (CC'') de façon similaire à ci-dessus :

$$(AA'') : (1 - \beta)x + (1 - \alpha - \beta)y = 1 - \alpha - \beta,$$

$$(BB'') : \alpha x - \beta y = 0,$$

$$(CC'') : (1 - \alpha - \beta)x + (1 - \alpha)y = 1 - \alpha - \beta.$$

Ensuite, il s'agit de montrer que le système formé de ces 3 équations admet une solution. Or, on voit que la troisième ligne est la somme est deux premières, donc ce système est équivalent à

$$\begin{cases} (1 - \beta)x + (1 - \alpha - \beta)y = 1 - \alpha - \beta \\ \alpha x - \beta y = 0 \end{cases}$$

Le déterminant associé vaut

$$-\beta(1 - \beta) - \alpha(1 - \alpha) + \alpha\beta.$$

Or, comme le point P est à l'intérieur du triangle, on a $\alpha + \beta < 1$. On en déduit

$$\alpha\beta < \alpha(1 - \alpha) < \alpha(1 - \alpha) + \beta(1 - \beta),$$

donc le déterminant associé au système est strictement négatif, donc non nul : le système associé admet une solution.

Deuxième méthode. On se place dans le repère barycentrique (A, B, C). On note $P = (a, b, c)$, en gardant en tête que dans un repère barycentrique la sommes des coordonnées vaut toujours 1. Comme P est à l'intérieur du triangle, on a $a, b, c > 0$. On trouve les coordonnées du point (AA') on écrivant $A' = (0, \lambda, \mu)$, puis en écrivant que, dans l'espace universel, les vecteurs $A - P = (a-1, b, c)$ et $A' - A = (-1, \lambda, \mu)$ sont colinéaires, ce qui fournit $A' = (0, b/(b+c), c/(b+c))$. Par permutation de (A, B, C), on trouve $B' = (a/(a+c), 0, c/(a+c))$ et $C' = (a/(a+b), b/(a+b), 0)$. Par symétrie par rapport au centres des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, on trouve

$$A'' = \Big(0, \frac{c}{b+c}, \frac{b}{b+c}\Big), \quad B'' = \Big(\frac{c}{a+c}, 0, \frac{a}{a+c}\Big), \quad C'' = \Big(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}, 0\Big).$$

Enfin, cherchons Q, le point d'intersection des droites (AA'') et (BB''). Pour cela, on cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tels que $A + \lambda\overrightarrow{AA''} = B + \mu\overrightarrow{BB''}$. Cela se traduit en l'égalité $(1-\lambda, \frac{\lambda c}{b+c}, \frac{\lambda b}{b+c}) = (\frac{\mu c}{a+c}, 1-\mu, \frac{\mu a}{a+c})$. On trouve alors $\lambda = \frac{a(b+c)}{ab+ac+bc}$, et donc

$$Q = \Big(\frac{bc}{ab+ac+bc}, \frac{ac}{ab+ac+bc}\frac{ab}{ab+ac+bc}\Big).$$

En notant $S = ab + ac + bc$, dans l'espace universel toujours, on a $Q - C = S^{-1}(bc, ac, -bc-ac) = cS^{-1}(b, a, -a-b)$, tandis que $C'' - C = (a+b)^{-1}(b, a, -a-b)$. On déduit que $\overrightarrow{QC}$ et $\overrightarrow{CC''}$ sont colinéaires, donc que $Q \in (CC'')$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Troisième méthode. On utilise le théoréme de Ceva, après avoir trouvé les coordonnées de A'', B'' et C'' comme dans la 2e méthode. Il suffit donc de montrer que, après avoir posé

$$A'' = (a_1, a_2, a_3), \quad B'' = (b_1, b_2, b_3), \quad C'' = (c_1, c_2, c_3),$$

nous avons $a_2b_3c_1 = a_3b_1c_2$. En effet, on a

$$a_2b_3c_1 = \frac{bca}{(b+c)(a+c)(a+b)}, \qquad a_1b_2c_3 = \frac{abc}{(b+c)(a+c)(a+b)}.$$

Quatrième méthode. On utilise encore le théoréme de Ceva, mais sans calculer explicitement les coordonnées de A'', B'', C'' en fonction de celles de P. Puisque A', B', C' sont sur les segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement, on sait que leurs coordonnées barycentriques sont de la forme

$$A' = (0, \lambda, 1-\lambda), \quad B' = (1-\mu, 0\mu), \quad C' = (\nu, 1-\nu, 0),$$

Avec $\lambda, \mu, \nu \in [0, 1]$. Par hypothèse, les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en P. D'après l'exercice 9, on a donc

$$\lambda\mu\nu = (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu).$$

Par symétrie, les coordonnées des points A'', B'' et C'' sont

$$A'' = (0, 1-\lambda, \lambda), \quad B'' = (\mu, 0, 1-\mu), \quad C'' = (1-\nu, \nu, 0).$$

D'après l'exercice 9, la conclusion voulue découle de l'égalité $(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) = \lambda\mu\nu$, qui est une reformulation de celle qui a été trouvée ci-dessus.