L3 Mathématiques, 2019/20, Géométrie 2 (Luminy), TD4.
Géométrie affine euclidienne

1 Espaces euclidiens: distance, orthogonalité

Exercice 1. Soit $\{A, B, C\}$ un triangle et I le milieu de $\{B, C\}$. Montrer que le triangle $\{A, B, C\}$ est isocéle en A si et seulement si le triangle $\{A, B, I\}$ est rectangle en I.

Exercice 2. Montrer qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si les diagonales sont perpendiculaires et que c'est un rectangle si et seulement si les diagonales ont même longueur.

Exercice 3. Soit (P, Q, R, S) un parallélogramme, D la droite passant par P et paralléle à (QS), E la droite passant par Q et paralléle à (PR), F la droite passant par R et paralléle à (QS) et enfin G la droite passant par S et paralléle à (PR). Soient

$$P' = D \cap E, Q' = E \cap F, R' = F \cap G, S' = G \cap D.$$

Montrer que (P', Q', R', S') est un parallélogramme, que c'est un losange si et seulement si (P, Q, R, S) est un rectangle et réciproquement. Enfin, montrer que l'un est un carré si et seulement si l'autre est un carré.

Dans les exos 4 -10 l'espace est $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni du repère euclidien standard.

Exercice 4. Montrer que des droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

Exercice 5. Soit D une droite dirigée par $u(1, 2, 3)$. Déterminer une équation du plan perpendiculaire à D passant par le point de coordonnées $(2, 3, 5)$.

Exercice 6. Soit H le plan passant par les points de coordonnées $(1, -2, 1), (0, 1, 2)$ et $(1, 3, 4)$. Déterminer un vecteur directeur de la droite D perpendiculaire à H passant par le point de coordonnées $(5, 1, 3)$. Donner une présentation paramétrique de D.

Exercice 7. Parmi les plans d'équations

$$4x + 2y - 4z + 5 = 0,\ 2x + y + 2z - 1 = 0,\ 3x - y - 2z - 5 = 0,$$

$$x + 9y - 3z + 2 = 0,\ x - 3z + 2 = 0 \text{ et } 2x - 6z - 7 = 0$$

lesquels sont paralléles ou perpendiculaires ?

Exercice 8. Soient D la droite d'équation $x + y + 1 = 0$ et $P(1, 1)$. Calculer $d(P, D)$, la distance de P à D. Même question pour $D' : 2x + 3y - 4 = 0$ et $P'(2, 3)$.

Exercice 9. Quelle est la distance du point $P(1,1,1)$ à la droite passant par le point de coordonnées $(-1,2,3)$ et dirigée par le vecteur $(2,-1,2)$?

Exercice 10. Soit D l'intersection des plans d'équations

$$x+y+z=2 \text{ et } 2x-3y+z=3.$$

Quelle est la distance du point $P(1,-1,1)$ à D?

2 Applications orthogonales

Exercice 11. Soit u un endomorphisme (linéaire) d'un espace vectoriel euclidien V. On suppose que deux des trois affirmations suivantes sont vraies:
a). u est involutive ($u \circ u = id_V$);
b). u est orthogonale;
c). u est symétrique.
Montrer que la troisième affirmation est également vraie et que u est une symétrie orthogonale.

Exercice 12. Soit $t = t_u$ (avec $u \in \overrightarrow{E}$) une translation d'un espace affine euclidien E de dimension finie. Démontrer qu'on peut trouver deux hyperplans affines H_1 et H_2 tels que $t = s_{H_1} \circ s_{H_2}$. Quelles conditions vérifient les hyperplans H_1 et H_2? Sont-ils uniques ?

Exercice 13. Soit φ une transformation orthogonale (linéaire) d'un espace vectoriel euclidien V et soit λ une valeur propre de φ. Montrer que $|\lambda| = 1$.

Exercice 14. Dans le plan affine euclidien orienté P, muni d'un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R}$, on considère l'application f de P dans lui-même, définie par ses formules analytiques

$$x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1,\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y,\ f(x,y) = (x',y').$$

Déterminer la nature et les éléments de f.

Même question avec g définie par

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2,\ y' = \frac{1}{2}\big(x + \sqrt{3}y + 1\big).$$

Exercice 15. Dans le plan affine euclidien orienté P, muni d'un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R}$, on considère les trois droites

$$D_1 : x + 2y - 1 = 0,\ D_2 : x + y - 2 = 0,\ D_3 : 3x - y = 0.$$

a). Déterminer les formules analytiques des trois réflexions $s_{D_1}, s_{D_2}, s_{D_3}$.
b). Déterminer la nature et les éléments de $f = s_{D_1} \circ s_{D_2} \circ s_{D_3}$.

Exercice 16. Dans l'espace affine euclidien orienté E ($\dim E = 3$), muni d'un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R}$, on considère l'application f de E dans lui-même, définie par ses formules analytiques, $f(x, y, z) = (x', y', z')$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1,\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z,\ z' = \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z + 1.$$

Déterminer la nature et les éléments de f.

Même question avec g définie par

$$x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1,\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 1,\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}.$$

3 Géométrie élémentaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Dans les exos 17-21 l'espace est $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni du repère euclidien standard.

Exercice 17. On considère un rectangle passant par le point de coordonnées (7/3, 0), ayant pour sommet le point de coordonnées (2,3) et dont un des cotés a pour équation

$$2x - 3y + 5 = 0.$$

Déterminer des équations des autres cotés et les coordonnées du centre.

Exercice 18. On considère un triangle $\{A, B, C\}$ tel que $A(2, 7)$, la hauteur issue de B a pour équation $3x + y + 11 = 0$ et la médiane issue de C a pour équation $x + 2y + 7 = 0$. Déterminer des équations des cotés du triangle.

Exercice 19. Soient $A(2, 4), B(2, 4)$ et $C(7, 1)$. Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle. En donner une équation. Déterminer aussi une équation de la droite d'Euler. Déterminer l'intersection de cette droite avec le cercle circonscrit.

Exercice 20. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(-3, 1), (1, 5)$ et $(3, -3)$. Déterminer des équations des médianes, des médiatrices et des hauteurs du triangle $\{A, B, C\}$. Déterminer leurs intersections respectives G, O et H. Vérifier que ces trois points sont alignés. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle $\{A, B, C\}$. Déterminer les symétriques de H par les symétries orthogonales par rapport aux cotées du triangles. Vérifier que ces trois points sont sur le cercle circonscrit. Même chose avec les symétriques par rapport aux milieux des cotés.

Exercice 21. On note $\Omega(0, 0, 0)$ le centre du repère et A, B et C les points de coordonnées respectives $A(2\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 2, 0)$ et $C(0, 0, 1)$. Déterminer une équation du plan passant par A, B et C. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H de Ω sur ce plan. Calculer la distance de Ω à ce plan. Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire au plan passant par Ω, C et H. Montrer que H est l'orthocentre du triangle $\{A, B, C\}$.