L3 Mathématiques, 2019/20, Géométrie 2 (Luminy), TD3.

Espace universel et barycentres

Exercice 1. Soit E un espace affine, soient $P, Q, R, S \in E$ tous distincts et soient I, J, K et L les milieux respectifs de $\{P, Q\}, \{Q, R\}, \{R, S\}$ et $\{S, P\}$. Montrer que (I, J, K, L) est un parallélogramme.

Exercice 2. Soit A, B deux points et f l'application qui envoie M sur le centre de gravité de $\{A, B, M\}$. Montrer que f est une homothétie dont on déterminera les invariants (éléments caractéristiques).

Exercice 3. Soit (A, B, C) un repère affine du plan affine. Soit M de coordonnes barycentriques (α, β, γ) dans ce repère. Soit A' le milieu de $\{B, C\}$. Soit N le symétrique de M par rapport à A' (c-à-d. le point tel que A' est le milieu de $\{M, N\}$). Déterminer les coordonnées barycentriques de N dans (A, B, C).

Exercice 4. Montrer que f est une dilatation si et seulement si il existe α, β, γ avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $A, B \in E$ tels que pour tout $M \in E, f(M)$ soit le barycentre de $\{A, B, M\}$ affectés des coefficients α, β, γ.

Exercice 5. Soit H un plan affine rapporté à un repére affine. Montrer qu'une application

$$f : H \longrightarrow H$$

est une dilatation si et seulement si il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta + \gamma \neq 1$ tels que le point de coordonnées barycentriques (x, y, z) soit envoyé sur le point de coordonnées barycentriques

$$\big((1 - \beta - \gamma)x + \beta(y + z), (1 - \alpha - \gamma)y + \beta(x + z), (1 - \alpha - \beta)z + \gamma(x + y)\big).$$

Déterminer alors ses invariants (éléments caractéristiques).

Exercice 6. Soit $T := \{A, B, C\}$ un triangle et A', B' et C' situés sur les cotés opposés à A, B et C, respectivement. Montrer que T et $\{A', B', C'\}$ ont même centre de gravité si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$A' = \lambda B + \mu C,\ B' = \lambda C + \mu A,\ C' = \lambda A + \mu B.$$

Les points A', B' et C' peuvent ils être alignés ?

Exercice 7. Dans un plan, soient I le milieu de $\{A, B\}$ et I' le milieu de $\{A', B'\}$. Montrer que si $A' \neq A$ et $B' \neq B$, alors les droites $(AA'), (BB')$ et (II') sont paralléles ou concourantes.

Exercice 8. Soit P un plan affine rapporté à un repère (O, e_1, e_2), soient D et D' les droites d'équation $x + y = 2, 3x - y = 3$, et soit s la symétrie par rapport D parallèlement à D'.

a). Déterminer les équations des sous espaces $\widetilde{D}$ et $\widetilde{D}'$ associés à D et D' dans l'espace universel $\hat{P}$ dans la base (O, e_1, e_2) de $\hat{P}$.

b). Déterminer par sa matrice dans la base (O, e_1, e_2) l'endomorphisme $\widetilde{s}$ de $\hat{P}$ associé à s.

c). Que peut-on dire de l'endomorphisme de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

dans la base (O, e_1, e_2)?

Exercice 9. Démontrer le théorème de Ceva : Si A, B, C forment un repère affine et

$$A'(a_1, a_2, a_3), B'(b_1, b_2, b_3), C'(c_1, c_2, c_3)$$

distincts de A, B, C de coordonnées respectives, alors les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$a_2 b_3 c_1 = a_3 b_1 c_2.$$

Exercice 10. Montrer que si A, B, C forment un repère affine et

$$D : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

est une droite, alors

$$D || (AB) \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha = \beta.$$

En déduire que si

$$A'(a_1, a_2, a_3) \neq B'(b_1, b_2, b_3),$$

alors

$$(AB) \; || \; (A'B') \quad \text{si et seulement si} \quad a_3 = b_3.$$

Exercice 11. Soient A, B, C, A', B', C' tous distincts tels que

$$(AB) \; || \; (B'C) \; || \; (C'A')$$

et

$$(AC) \; || \; (C'B) \; || \; (B'A').$$

Montrer que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles ou concourantes.

Exercice 12. Démontrer le théorème de Ménélaüs : Si A, B, C forment un repère affine et

$$A'(a_1, a_2, a_3), B'(b_1, b_2, b_3), C'(c_1, c_2, c_3)$$

avec

$$A' \in (BC), B' \in (AC), C' \in (AB),$$

alors A', B', C' sont alignés si et seulement si

$$a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 = 0.$$