L3 Mathématiques, 2019/20, Géométrie 2 (Luminy), TD2.

Applications affines

Exercice 1. Montrer que toute application affine dont la partie linéaire est la fonction nulle, est une application constante.

Exercice 2. On dit qu'une application $s : E \longrightarrow E$ est une symètrie si $s^2 = Id_E$. Montrer qu'une application affine s est une symètrie si et seulement si l'ensemble $F = \{x \in E : s(x) = x\}$ des points fixes de s est non vide et $\overrightarrow{s}$ est une symètrie vectorielle.

Exercice 3. Montrer que si s est une symètrie, alors l'application p qui à P associe le milieu de $\{P, s(P)\}$ est une projection et que

$$\overrightarrow{p} = \frac{\overrightarrow{s} + Id_{\overrightarrow{E}}}{2}.$$

Exercice 4. Soit H un plan affine rapporté à un repére cartésien. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et soit l'application f donnée par

$$f : H \longrightarrow H, (x, y) \mapsto (ay + b, \frac{x}{a} - \frac{b}{a}).$$

Montrer que f est une symètrie dont on déterminera les invariants (les éléments caracteristiques).

Exercice 5. a). Soit p une projection vectorielle de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$. On considère l'endomorphisme q de $\overrightarrow{E}$ défini par $q = Id_{\overrightarrow{E}} - p$. Montrer que q est une projection vectorielle dont on déterminera les invariants en fonction de ceux de p. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0_{\overrightarrow{E}}$.

b). Soient p et p' deux projections vectorielles de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$. Montrer que $p+p'$ est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p' = p' \circ p = 0_{\overrightarrow{E}}$. Déterminer, dans ce cas, les invariants de $p+p'$ en fonction de ceux de p et ceux de p'.

c). Montrer qu'un endomorphisme φ de l'espace vectoriel de dimension finie $\overrightarrow{E}$ est un projecteur si et seulement si φ est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\{0, 1\}$. En déduire que $\overrightarrow{E} = \ker(\varphi) \oplus \ker(Id_{\overrightarrow{E}} - \varphi)$ si et seulement si φ est une projection vectorielle.

Exercice 6. Soit A un point et f l'application qui envoie $M \in E$ sur le milieu de $\{A, M\}$. Montrer que f est une homothétie dont on déterminera les invariants (les éléments caracteristiques).

Exercice 7. Soient f et g deux dilatations. Déterminer les invariants (les éléments caracteristiques) de $g \circ f$ (vecteur de translation ou centre et rapport) en fonction de ceux de f et de g.

Exercice 8. Soit D une droite affine sur $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow D$ une application affine distincte de l'identité telle que pour tout point $M \in D, (f \circ f)(M)$ soit le milieu de $\{M, f(M)\}$. Montrer que f est une homothétie dont on déterminera le rapport.

Exercice 9. Soit E un espace affine de dimension finie et f un endomorphisme affine de E. Montrer que f possède un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

Exercice 10. Montrer que $\mathrm{Hom}(E, A) \bigcup \{\mathrm{Id}_E\}$ est un groupe commutatif isomorphe à $\mathbb{R}^*$, où $\mathrm{Hom}(E, A)$ est l'ensemble des homothéties de E centrées en $A \in E$.

Exercice 11. a). Démontrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

est une projection vectorielle p dont on déterminera les éléments caracteristiques. Donner la matrice de la symétrie s vectorielle associée avec p.

b). Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de la projection vectorielle p' sur la droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ dirige par $u = {}^t(1, 0, -1)$ dans la direction du plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ d'équation $x + y = 0$. Donner la matrice de la symétrie s' vectorielle associée avec p'.

Exercice 12. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère cartésien (O, e_1, e_2, e_3), on considère la droite

$$D : 3x + y + z = 1,\ x + y - 2z = 2.$$

a). Déterminer (par ses formules analytiques) la projection sur le plan $P = O + < e_1, e_2 >$ dans la direction de D.

b). Déterminer (par formules analytiques) la symétrie par rapport à D dans la direction $\overrightarrow{F} = < e_2, e_3 >$.

c). Déterminer une équation de la projection de la droite D sur le plan P dans la direction de e_3.

Exercice 13. Dans l'espace affine $M_2(\mathbb{R}) = \overrightarrow{M_2(\mathbb{R})}$ des 2×2-matrices rapporté à un repère cartésien $(O, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22})$, où $\{A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}\}$ est la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ on considère la droite D passant par A_{11} et dirigée par $< A_{21} + A_{22} >$.

a). Déterminer (par ses formules analytiques) la projection sur la droite D dans la direction $\overrightarrow{H} = < A_{11}, A_{12}, A_{21} >$. On pourrait écrire une matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$ dans la forme $M = xA_{11} + yA_{12} + zA_{21} + tA_{22},\ x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

b). Déterminer (par formules analytiques) la symétrie par rapport à D dans la direction $\overrightarrow{H}' = < A_{11}, A_{12}, A_{22} >$.