L3 Mathématiques, 2019/20, Gómétrie 2 (Luminy), TD1.

Espaces affines; sous-espaces affines (variétés affines)

Exercice 1. On pose

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 = 0\}.$$

Montrer que l'application

$$\mathbb{R} \times E \longrightarrow E, (\lambda, (x, y)) \mapsto (x + \lambda, y - \lambda)$$

est bien définie et fait de E un espace affine.

Exercice 2. Montrer que l'application

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, (\lambda, P) \mapsto Pe^{\lambda}$$

fait de $\mathbb{R}_{>0}$ un espace affine.

Exercice 3. La partie $\mathbb{R}_{>0}$ de $\mathbb{R}$ est elle un sous-espace affine?

Exercice 4. Soient $P := (a, b, c)$ et $Q := (a', b', c')$ deux points distincts de $\mathbb{R}^3$ et soit $D := (PQ)$ l'unique droite passant par P et Q. Déterminer un vecteur directeur de $\overrightarrow{D}$.

Exercice 5. Soit H le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Déterminer une base de $\overrightarrow{H}$.

Exercice 6. Soient E l'espace vectoriel des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$ et $a, b \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$F := \{f \in E : f(0) = a, f(1) = b\}$$

est un sous-espace affine de E.

Exercice 7. Soit F une partie non-vide d'un espace affine E. Montrer que F est un sous-espace affine de E si et seulement si

$$\forall P \neq Q \in F, (PQ) \subset F.$$

Exercice 8. Donner des équations pour la droite $D \subset \mathbb{R}^3$ passant par $P := (1, 2, 3)$ et $Q := (2, 0, 1)$. Donner aussi des équations pour $\overrightarrow{D}$.

Exercice 9. Trouver les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesqueslles le point $M := (1, a, b) \in \mathbb{R}^3$ est sur la droite passant par $P := (0, 1, 0)$ et dirigée par $u := (1, 1, 1)$.

Exercice 10. Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ la droite passant par $P := (0,1,0)$ dirigée par $u := (1,1,1)$. De même, soit $D' \subset \mathbb{R}^3$ la droite passant par $P' := (1,1,1)$ dirigée par $u' := (a,1,b)$. Déterminer en fonction de a et b les positions respectives de D et D'.

Exercice 11. Montrer que la droite $D \subset \mathbb{R}^3$ qui passe par $A := (4,9,4)$ et $B := (13,3,7)$ rencontre la droite d'équations

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{9} = \frac{z-1}{4}.$$

Exercice 12. Donner une équation pour le plan $H \subset \mathbb{R}^3$ passant par $P := (1,2,1)$ et dirigé par les vecteurs $u := (0,3,1)$ et $v := (1,0,2)$. Donner aussi une équation pour $\overrightarrow{H}$.

Exercice 13. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$ non-nuls. Donner une équation pour le plan $H \subset \mathbb{R}^3$ qui coupe les axes en $(a,0,0),(0,b,0)$ et $(0,0,c)$. Donner aussi une équation pour $\overrightarrow{H}$.

Exercice 14. Donner une équation pour le plan $H \subset \mathbb{R}^3$ qui passe par $(1,2,3),(2,4,5)$ et $(4,3,1)$. Donner aussi une équation pour $\overrightarrow{H}$.

Exercice 15. Soient $m,p \in \mathbb{R}$. Montrer que les plans d'équations

$$mx - (2m+1)y + (m+3)z - 2 = 0$$

et

$$4x + (m-12)y + 2pz - 4 = 0$$

se rencontrent dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16. Soient $a,b \in \mathbb{R}$ distincts non-nuls avec $|a| \neq |b|$. Donner une équation de la droite $D \subset \mathbb{R}^2$ passant par $P := (a,b)$ et par l'intersection des droites d'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

et

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1.$$

Exercice 17. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit E_a l'ensemble des matrices dans la base canonique des applications linéaire de $L(\mathbb{R}^2)$ qui trasforment le vecteur (1,1) en vecteur $(-a,0)$.

1). Montrer que E_a est un sous-espace affine de $M_2(\mathbb{R})$ et en donner un point et une base de son espace directeur.

2). Soit $F = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 1\}$, et soit $D_a = F \bigcap E_a$. Montrer que D_a est un sous-espace affine de $M_2(\mathbb{R})$ et en donner un point et une base de son espace directeur. Calculer $\dim(D_a \bigcap E_a)$ et $\dim < D_a, E_a >$ (l'éspace engendré par D_a et E_a) comme fonctions de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 18. [Droites d'un plan affine P, rapporté à un repère $\mathcal{R}$]

I. a). Soit $A = (a, b) \in P$, et soit $u = {}^t(p, q) \in \overrightarrow{P}$. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite $D = T+ < u >$ est

$$x = a + p\lambda, y = b + q\lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

b). Soient a, b, c, d quatre scalaires. Soit A l'ensemble des points M du plan t.q. les coordonnes (x, y) dans $\mathcal{R}$ sont telles qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = a + bt, \ y = c + dt.$$

À quelle condition A est-elle une droite?

c). Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) lorsque $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

d). À quelle condition (nécessaire et suffisante) la droite D de représentation paramétrique

$$x = a + bt, y = c + dt, t \in \mathbb{R}$$

et la droite Δ de représentation paramétrique

$$x = \alpha + \beta\lambda, y = \gamma + \delta\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

sont-elles parallèles? confondues? sécantes?

II. a). Justifier qu'une équation cartésienne d'une droite Δ dans le repère $\mathcal{R}$ est de la forme

$$ux + vy + w = 0.$$

Quelle condition doit-on imposer à a, b, c pour que $ax+by+c = 0$ soit l'équation cartésienne d'une droite Δ ?

b). Montrer que la droite $\Delta : ax + by + c = 0$ admet le vecteur $u = {}^t(-b, a)$ comme vecteur directeur.

c). Soit $u = {}^t(a, b), ab \neq 0$. Montrer que la droite D dirigée par u et passant par $A(x_A, y_A)$ admet comme équation cartésienne

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b}.$$

d). À quelle condition deux droites $D : \ ax+by+c = 0$ et $D : \ a'x+b'y+c' = 0$ sont-elles parallèles? confondues? sécantes?

e). Montrer qu'une équation cartésienne de la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est

$$\begin{vmatrix} x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

f). Montrer que trois droites

$$D_i : a_i x + b_i y + c_i = 0,\ i = 1, 2, 3$$

sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 19. [Plans d'un espace affine E de dimension 3 rapporté à un repère $\mathcal{R}$]

I. a). Soit A un point de coordonnes (x_A, y_A, z_A) (dans $\mathcal{R}$) et soient $u = {}^t(\alpha, \beta, \gamma)$, $v = {}^t(\alpha', \beta', \gamma')$ deux vecteurs linéairement indépendants.

Justifier qu'une représentation paramétrique du plan $P = A + < u, v >$ est

$$x = x_A + \lambda\alpha + \mu\alpha',\ y = y_A + \lambda\beta + \mu\beta',\ z = z_A + \lambda\gamma + \mu\gamma',\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b). Soient $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ fixés. Soit Π l'ensemble des points M de E dont les coordonnes (x, y, z) verifient pour certains $t, u \in \mathbb{R}$:

$$x = a + bt + cu,\ y = d + et + fu,\ z = g + ht + iu.$$

À quelle condition Π est-il un plan ? Dans ce cas, quel point du plan Π et quels vecteurs de la direction $\overrightarrow{\Pi}$ connaît-on facilement? Si Π est un plan, à quelle condition passe-t-il par lorigine O du repère?

c). Étudier l'intersection des plans P et P' donnés par leurs représentations paramétriques:

$$P :\ x = 1 + 3t - u,\ y = -3 - t,\ z = u,\ t, u \in \mathbb{R},$$
$$P' :\ x = -2 - t,\ y = -3 - t - 2u,\ z = t + u,\ t, u \in \mathbb{R}.$$

II. a). Justifier qu'une équation cartésienne d'un plan Π dans le repère $\mathcal{R}$ est de la forme $ux + vy + wz = h$. Quelle condition doit-on imposer à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ soit l'équation cartésienne d'un plan P?

b). Montrer que le plan $\Pi : ax + by + cz = d$ est dirigé par $< u, v >$ avec $u = {}^t(-b, a, 0), v = {}^t(-c, 0, a)$. Donner deux autres vecteurs non alignés avec u ni avec v du plan vectoriel $\overrightarrow{\Pi}$.

c). À quelle condition deux plans $P : ax + by + cz = d$ et $P : ax + by + cz = d$ sont-ils parallèles? confondus? sécants?

d). Soit P un plan ne passant pas par l'origine. Montrer qu'il admet une équation cartésienne de la forme

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \ abc \neq 0.$$

Quelle interprétation graphique peut-on faire des nombres a, b et c?

e). Montrer qu'une équation cartésienne du plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par $< u, v >$ avec $u = {}^t(\alpha, \beta, \gamma), v = {}^t(\alpha', \beta', \gamma')$ est

$$\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha & \alpha' \\ y - y_A & \beta & \beta' \\ z - z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 20. [Droites d'un espace affine E de dimension 3 rapporté à un repère $\mathcal{R}$.]

I. a). Soit A un point de coordonnées (x_A, y_A, z_A) (dans $\mathcal{R}$) et soit $u = {}^t(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$ un vecteur non nul. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite $D = A + < u >$ est

$$D: \ x = x_A + \lambda\alpha, \ y = y_A + \lambda\beta, \ z = z_A + \lambda\gamma, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

b). Soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ six scalaires. Soit Δ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ verifiant

$$x = a + bt, \ y = c + dt, \ z = e + ft \ \text{ pour certain } t \in \mathbb{R}.$$

À quelle condition Δ est-elle une droite? Dans ce cas, quel point et quel vecteur directeur en connaît-on facilement? Si Δ est une droite, à quelle condition passe-t-elle par l'origine O du repère?

c). Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) lorsque $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.

d). À quelle condition (nécessaire et suffisante) la droite D de représentation paramétrique

$$x = a + bt, \ y = c + dt, \ z = e + ft, \ t \in \mathbb{R}.$$

et la droite Δ de représentation paramétrique

$$x := x_\Delta + \lambda\alpha, \ y = y_\Delta + \lambda\beta, \ z = z_\Delta + \lambda\gamma, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

sont-elles parallèles? confondues? sécantes?

e). Étudier l'intersection des droites D et D' donnés par leurs représentations paramétriques

$$D: \ x = 1 + 3t, \ y = -3 - tz = 2t, \ t \in \mathbb{R}$$

$$D': \ x = -2 - t, \ y = -3 + t, \ z = t, \ t \in \mathbb{R}.$$

II. a). Justifier qu'un système d'équations cartésiennes d'une droite Δ dans le repère $\mathcal{R}$ est de la forme

$$ax + by + cz = d, \ a'x + b'y + c'z = d'.$$

b). Montrer que la droite

$$\Delta : \ ax + by + cz = d, \ a'x + b'y + c'z = d'$$

est dirigée par $< u >$ avec

$$u = {}^t\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right).$$

c). À quelle condition deux droites

$$D : \ ax + by + cz = d, \ a'x + b'y + c'z = d'$$

et

$$\Delta : \ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta, \ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta'$$

sont-elles parallèles? confondues? sécantes?

d). Soit D la droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par

$$u = {}^t(\alpha, \beta, \gamma) \text{ avec } \alpha\beta\gamma \neq 0.$$

Montrer qu'un système d'équations cartésiennes de la droite D est

$$\frac{x - x_A}{\alpha} = \frac{y - y_A}{\beta} = \frac{z - z_A}{\gamma}.$$

e). Comment trouver une représentation paramétrique d'une droite dont on connaît un système d'équations cartésiennes? Et comment trouver un système d'équations cartésiennes d'une droite dont on connaît une représentation paramétrique?

III. Déterminer l'équation du plan qui contient la droite

$$D : \ x - 1 = 0, \ y + z - 2 = 0$$

et qui passe par le point $A(3, -1, 1)$.