DM 1 corrigé

Exercice 1. 1. Soit f une bijection de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ préservant les droites.

(a) Par hypothèse, l'image par f de la droite (MN) est aussi une droite. Elle contient les points $f(M)$ et $f(N)$. Ces points sont distincts, puisque f est bijective, donc en particulier injective. Comme par deux points distincts il passe une unique droite, on en déduit que $f((MN)) = (f(M)f(N))$.

(b) Par les propriétés usuelles de l'image directe, on a toujours $f(D \cap D') \subset f(D) \cap f(D')$. Montrons l'inclusion dans l'autre sens. Soit $P \in f(D) \cap f(D')$, ce qui signifie par définition que $P = f(Q) = f(Q')$ avec $Q \in D$ et $Q' \in D'$. Comme f est injective, on déduit que $Q = Q' \in D \cap D'$, et donc $P = f(Q) \in f(D \cap D')$. *[On aurait aussi pu justifier par le calcul suivant : $f^{-1}(f(D) \cap f(D')) \subset f^{-1}(f(D)) \cap f^{-1}(f(D')) = D \cap D'$.]*

(c) — **Sens direct.** Supposons que $f(D)$ et $f(D')$ sont parallèles. Si $f(D) = f(D')$, alors puisque f est bijective, on en déduit que $D = D'$. Si $f(D) \neq f(D')$, les droites $f(D)$ et $f(D')$ sont parallèles mais non confondues, donc $f(D) \cap f(D') = \varnothing$. D'après la question précédente on déduit que $D \cap D' = \varnothing$, donc les droites D et D' sont aussi non concourantes (donc en particulier parallèles).

— **Sens réciproque.** Supposons que D et D' sont parallèles. Si $D = D'$, alors $f(D) = f(D')$, et ces deux droites sont parallèles. Sinon, en raisonnant comme dans le sens direct, on trouve $D \cap D' = \varnothing$, donc $f(D) \cap f(D') = \varnothing$, donc $f(D)$ et $f(D')$ sont parallèles aussi.

(d) On utilise la Propriété 3.3.4 : $MNPQ$ est un parallélogramme si et seulement si $(MN) \parallel (PQ)$ et $(MQ) \parallel (NP)$. D'après les question 1.(a) et 1.(c), cela est équivalent à dire que $(f(M)f(N)) \parallel (f(P)f(Q))$ et $(f(M)f(Q)) \parallel (f(N)f(P))$, donc à dire que le quadruplet $(f(M)f(N)f(P)f(Q))$ est un parallélogramme.

2. (a) Les point M, N et P sont alignés si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP}$. En composant par l'application bijective $\overrightarrow{g}$, cette question devient équivalente à ce qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{g}(k\overrightarrow{MP})$, autrement dit, $\overrightarrow{g(M)g(N)} = k\overrightarrow{g}(\overrightarrow{MP}) = k\overrightarrow{g(M)g(P)}$. L'existence d'un tel k revient donc à ce que les vecteurs $\overrightarrow{g(M)g(N)}$ et $\overrightarrow{g(M)g(P)}$ soient colinéaires, autrement dit que les points $g(M), g(N), g(P)$ soient alignés.

(b) Soit D une droite, et $M, N \in D$ deux points distincts. Alors $g(M)$ et $g(N)$ sont aussi distincts, puisque g est injective. Soit $Q \in \mathscr{P}$. Comme g est surjective, il existe $P \in \mathscr{P}$ tel que $Q = g(P)$. Alors $Q \in g(D)$ si et seulement si $P \in D$, si et seulement si P, N, M sont alignés, si et seulement (grâce à la question précédente) $Q, g(M), g(N)$ sont alignés. Cela prouve que $g(D)$ est la droite $(g(M)g(N))$, en particulier, c'est une droite.

3. Comme les triplets (O, I, J) et (O', I', J') sont non alignés, la famille $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une base du linéarisé $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, et la famille $(\overrightarrow{O'I'}, \overrightarrow{O'J'})$ aussi. Il existe donc une application linéaire bijective $\overrightarrow{g}$ sur $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ telle que

$$\overrightarrow{g}(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{O'I'}, \qquad \overrightarrow{g}(\overrightarrow{OJ}) = \overrightarrow{O'J'}.$$

On définit donc une application affine bijective g sur $\mathscr{P}$ en posant

$$g(P) = O' + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{OP}).$$

Cette application satisfait $g(O) = O' + \overrightarrow{0} = O'$, $g(I) = O' + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{OI}) = O' + \overrightarrow{O'I'} = I'$, et de même $g(J) = J'$.

4. (a) Pour $x=0$ ou $y=0$, l'égalité demandée est vraie avec $u(0)=0$, et $v(0)=0$. Supposons $x \neq 0$, et soit M le point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors $(OM) \parallel (OI)$, donc d'après la question 1a et 1c, on a $(f(O)f(M)) \parallel (f(O)f(I))$, autrement dit $(Of(M)) \parallel (OI)$. En en déduit que la seconde coordonnée du point $f(M)$ est nulle, autrement dit, qu'il existe un réel $u(x)$ tel que $f(M) \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \end{pmatrix}$. La démonstration de la seconde partie de la question est identique, puisque le problème est symétrique par la permutation $I \leftrightarrow J$.

(b) Déjà, le quadruplet $(OACB)$ est bien un parallélogramme puisque, dans le repère (O, I, J), l'on a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ y-y \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$. La question 1d nous assure que $(f(O)f(A)f(C)f(B))$ est un parallélogramme. On sait que $f(O) = O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et d'après la question précédente, $f(A) = \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ v(y) \end{pmatrix}$. Par définition du parallélogramme, on déduit $\overrightarrow{f(O)f(A)} + \overrightarrow{f(C)f(B)} = \overrightarrow{0}$, soit

$$f(C) = f(B) - \overrightarrow{f(C)f(B)} = f(B) + \overrightarrow{f(O)f(A)} = \begin{pmatrix} 0 \\ v(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(y) \end{pmatrix}.$$

(c) Puisque $I = f(I)$ et $J = f(J)$, on a $(f(A)f(B)) \parallel (IJ)$ si et seulement si $(f(A)f(B)) \parallel (f(I)f(J))$, si et seulement si $(AB) \parallel (IJ)$ par la question 1c. Mais $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x\overrightarrow{IJ}$, donc on a bien $(AB) \parallel (IJ)$. On en déduit que $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{IJ}$, or $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \begin{pmatrix} -u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$, Donc, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $-u(x) = -k$ et $v(x) = k$, ce qui implique bien $v(x) = u(x)$.

(d) Le quadruplet $(OACB)$ est bien un parallèlogramme, par une vérification identique à celle de la question 4b. On déduit que $(Of(A)f(C)f(B))$ est aussi un parallèlogramme, grâce à la question 1d et au fait que $f(O) = O$. On déduit que

$$f(C) = f(B) - \overrightarrow{f(C)f(B)} = f(B) + \overrightarrow{Of(A)}.$$

D'après les questions 1b et 1c, on a $f(A) = \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(B) = \begin{pmatrix} u(y) \\ u(1) \end{pmatrix}$, $f(C) = \begin{pmatrix} u(x+y) \\ u(1) \end{pmatrix}$. On déduit

$$\begin{pmatrix} u(x+y) \\ u(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(y) \\ u(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x)+u(y) \\ u(1) \end{pmatrix},$$

et on a donc bien $u(x+y) = u(x) + u(y)$.

(e) Puisque $f(I) = I$, on a $(f(A)f(C)) \parallel (If(B))$ si et seulement si $(f(A)f(C)) \parallel (f(I)f(B))$ si et seulement si $(AC) \parallel (IB)$. Or, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -x \\ xy \end{pmatrix}$ tandis que $\overrightarrow{IB} = \begin{pmatrix} -1 \\ y \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{IB}$. Donc $(AC) \parallel (IB)$, et donc $(f(A)f(C)) \parallel (If(B))$. Or, par les questions précédentes, l'on a $f(A) = \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ u(y) \end{pmatrix}$ et $f(C) = \begin{pmatrix} u(xy) \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient donc

$$\overrightarrow{f(A)f(C)} = \begin{pmatrix} -u(x) \\ u(xy) \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{If(B)} = \begin{pmatrix} -1 \\ u(y) \end{pmatrix}.$$

La colinéarité entre ces deux vecteurs se traduit par le fait le déterminant formé par ces deux vecteurs s'annule, soit $-u(x)u(y)+u(xy)=0$, ce qu'il fallait démontrer.

(f) Voici une ébauche de la démonstration de la propriété admise sur les automorphisme de $\mathbb{R}$. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que $\phi(0)=0$, $\phi(1)=1$, et pour tous réels x, y, $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$ et $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et réel x, l'on a par récurrence $\phi(nx)=n\phi(x)$. On déduit en particulier que $\phi(n)=n$. Si $x=p/q$ est un nombre rationnel, alors $q\phi(x)=\phi(qx)=\phi(p)=p$, donc $\phi(x)=p/q=x$. De plus, si $x<y$, Alors $\phi(y)-\phi(x)=\phi(y-x)=\phi(\sqrt{y-x}^2)=\phi(\sqrt{y-x})^2 \geq 0$, donc ϕ est croissante. On conclut en prenant x réel quelconque, et $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tel que $r_1 < x < r_2$. Puisque ϕ est croissante, on a $\phi(r_1) \leq \phi(x) \leq \phi(r_2)$ donc $r_1 \leq \phi(x) \leq r_2$. En faisant tendre r_1 et r_2 vers x, on obtient à la limite $\phi(x)=x$.

Revenons-en à notre question. On a une application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vérifions que c'est un automorphisme de corps de $\mathbb{R}$. On a $u(0)=0$, puisque $f(O)=f(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}u(0)\\u(0)\end{pmatrix}$, mais que par hypothèse $f(O)=O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. De plus, on a $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=I=f(I)=\begin{pmatrix}u(1)\\0\end{pmatrix}$ d'après la question 1a, donc $u(1)=1$. Pour x, y non nul, les propriétés

$$u(x+y)=u(x)+u(y), \qquad u(xy)=u(x)u(y)$$

ont été prouvées aux questions 1d et 1e, tandis que si $x=0$ ou $y=0$, elles sont triviales. On on déduit que u est bien un automorphisme de $\mathbb{R}$, donc que $u(x)=x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En conséquence, si $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est un point du plan, d'après les questions 4.(b) et 4.(c), l'on a $f(M)=\begin{pmatrix}u(x)\\u(y)\end{pmatrix}=\big(x,y\big)=M$, donc $f=\mathrm{id}_{\mathscr{P}}$.

5. (a) D'après la question 2a, les points $f^{-1}(O), f^{-1}(I), f^{-1}(J)$ ne sont pas alignés, car sinon, en composant par f, les points O, I, J le seraient, et cela contredirait le fait qu'ils forment un repère. D'après la question 3, il existe une application affine bijective g qui envoie le triplet (O, I, J) sur $(f^{-1}(O), f^{-1}(I), f^{-1}(J))$, autrement dit, telle que $f(g(O))=O$, $f(g(I))=I$, et $f(g(J))=J$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) Soit D une droite. Puisque g est une bijection affine, d'après la question 2b, elle préserve les droites, donc $g(D)$ est une droite. Par hypothèse f préserve les droites, donc $f(g(D))$ est aussi une droite. De plus, $f \circ g$ est bijective, comme composée de deux bijections. L'application $h=f\circ g$ est une bijection qui préserve les droites, et telle que $h(O)=O$, $h(I)=I$ et $h(J)=J$. D'après la question 4.(f), on déduit que $h=\mathrm{id}_{\mathscr{P}}$, ce qu'il fallait démontrer.

(c) Comme g est une application bijective affine, son application réciproque g^{-1} est aussi affine (Proposition 3.4.4 du cours). Mais $f=g^{-1}$. On conclut que f est affine.

Exercice 2. Première méthode. A mano. On va calculer les affixes de tous les points, et trouver explicitement les coordonnées du point d'intersection cherché. Une étape à ne jamais négliger est de se placer dans un repère qui facilite les calculs. Pour être en phase avec le dessin, on se place dans le repère (C, B, A), donc $B=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Notons $P=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$. Puisque P est à l'intérieur du triangle ABC, on $0<\alpha, \beta<1$. On a donc

$$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta-1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}\alpha-1\\\beta\end{pmatrix}.$$

On déduit que pour trois réels a, b, c, les équations des droites (AP), (BP), (CP) sont respectivement

$$(AP) : (1-\beta)x + \alpha y = a, \quad (BP) : \beta x - \alpha y = b, \quad (CP) : \beta x + (1-\alpha)y = c.$$

En fixant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A, B, C$ successivement on trouve $a = \alpha$, $b = 0$, $c = \beta$.

L'intersection $A' = (AP) \cap (BC)$ se trouve en posant $y = 0$ dans l'équation de (AP) : on obtient $A' = \begin{pmatrix} \alpha/(1-\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$. De même, en posant $x = 0$ dans l'équation de (CP), on trouve $C' = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha/(1-\alpha) \end{pmatrix}$. Enfin, la droite (AC) est d'équation $x + y = 1$, donc les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de B' sont les solutions du système

$$\begin{cases} \beta x - \alpha y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases},$$

et l'on trouve $B' = \begin{pmatrix} \alpha/(\alpha+\beta) \\ \beta/(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$. On obtient donc

$$A'' = B + \overrightarrow{A'C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha/(1-\beta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha-\beta)/(1-\beta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De même, $C'' = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\alpha-\beta)/(1-\alpha) \end{pmatrix}$. Enfin, on a

$$B'' = A + \overrightarrow{B'C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha/(\alpha+\beta) \\ \beta/(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta/(\alpha+\beta) \\ \alpha/(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

On trouve ensuite les équations des droites (AA''), (BB'') et (CC'') de façon similaire à ci-dessus :

$$(AA'') : (1-\beta)x + (1-\alpha-\beta)y = 1-\alpha-\beta,$$

$$(BB'') : \alpha x - \beta y = 0,$$

$$(CC'') : (1-\alpha-\beta)x + (1-\alpha)y = 1-\alpha-\beta.$$

Ensuite, il s'agit de montrer que le système formé de ces 3 équations admet une solution. Or, on voit que la troisième ligne est la somme est deux premières, donc ce système est équivalent à

$$\begin{cases} (1-\beta)x + (1-\alpha-\beta)y = 1-\alpha-\beta \\ \alpha x - \beta y = 0 \end{cases}$$

Le déterminant associé vaut

$$-\beta(1-\beta) - \alpha(1-\alpha) + \alpha\beta.$$

Or, comme le point P est à l'intérieur du triangle, on a $\alpha + \beta < 1$. On en déduit

$$\alpha\beta < \alpha(1-\alpha) < \alpha(1-\alpha) + \beta(1-\beta),$$

donc le déterminant associé au système est strictement négatif, donc non nul : le système associé admet une solution.

Deuxième méthode. On se place dans le repère barycentrique (A, B, C). On note $P = (a, b, c)$, en gardant en tête que dans un repère barycentrique la sommes des coordonnées vaut toujours 1.

Comme P est à l'intérieur du triangle, on a $a, b, c > 0$. On trouve les coordonnées du point (AA') on écrivant $A' = (0, \lambda, \mu)$, puis en écrivant que, dans l'espace universel, les vecteurs $A - P = (a-1, b, c)$ et $A' - A = (-1, \lambda, \mu)$ sont colinéaires, ce qui fournit $A' = (0, b/(b+c), c/(b+c))$. Par permutation de (A, B, C), on trouve $B' = (a/(a+c), 0, c/(a+c))$ et $C' = (a/(a+b), b/(a+b), 0)$. Par symétrie par rapport au centres des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, on trouve

$$A'' = \Big(0, \frac{c}{b+c}, \frac{b}{b+c}\Big), \quad B'' = \Big(\frac{c}{a+c}, 0, \frac{a}{a+c}\Big), \quad C'' = \Big(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}, 0\Big).$$

Enfin, cherchons Q, le point d'intersection des droites (AA'') et (BB''). Pour cela, on cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tels que $A + \lambda\overrightarrow{AA''} = B + \mu\overrightarrow{BB''}$. Cela se traduit en l'égalité $(1-\lambda, \frac{\lambda c}{b+c}, \frac{\lambda b}{b+c}) = (\frac{\mu c}{a+c}, 1-\mu, \frac{\mu a}{a+c})$. On trouve alors $\lambda = \frac{a(b+c)}{ab+ac+bc}$, et donc

$$Q = \Big(\frac{bc}{ab+ac+bc}, \frac{ac}{ab+ac+bc}\frac{ab}{ab+ac+bc}\Big).$$

En notant $S = ab+ac+bc$, dans l'espace universel toujours, on a $Q - C = S^{-1}(bc, ac, -bc-ac) = cS^{-1}(b, a, -a-b)$, tandis que $C'' - C = (a+b)^{-1}(b, a, -a-b)$. On déduit que $\overrightarrow{QC}$ et $\overrightarrow{CC''}$ sont colinéaires, donc que $Q \in (CC'')$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Troisième méthode. On utilise l'exercice 9 de la planche de TD 3, après avoir trouvé les coordonnées de A'', B'' et C'' comme dans la 2e méthode. Il suffit donc de montrer que, après avoir posé

$$A'' = (a_1, a_2, a_3), \quad B'' = (b_1, b_2, b_3), \quad C'' = (c_1, c_2, c_3),$$

nous avons $a_2b_3c_1 = a_3b_1c_2$. En effet, on a

$$a_2b_3c_1 = \frac{bca}{(b+c)(a+c)(a+b)}, \qquad a_1b_2c_3 = \frac{abc}{(b+c)(a+c)(a+b)}.$$

Quatrième méthode. On utilise encore l'exercice 9 de la planche de TD 3, mais sans calculer explicitement les coordonnées de A'', B'', C'' en fonction de celles de P. Puisque A', B', C' sont sur les segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement, on sait que leurs coordonnées barycentriques sont de la forme

$$A' = (0, \lambda, 1-\lambda), \quad B' = (1-\mu, 0\mu), \quad C' = (\nu, 1-\nu, 0),$$

Avec $\lambda, \mu, \nu \in [0, 1]$. Par hypothèse, les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en P. D'après l'exercice 9, on a donc

$$\lambda\mu\nu = (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu).$$

Par symétrie, les coordonnées des points A'', B'' et C'' sont

$$A'' = (0, 1-\lambda, \lambda), \quad B'' = (\mu, 0, 1-\mu), \quad C'' = (1-\nu, \nu, 0).$$

D'après l'exercice 9, la conclusion voulue découle de l'égalité $(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) = \lambda\mu\nu$, qui est une reformulation de celle qui a été trouvée ci-dessus.