DM 1

Exercice 1. On considère le plan euclidien $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J). Les coordonnées des éléments de $\mathscr{P}$ sont notées en colonne.

Étant donnée une bijection $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, on dit que f *préserve les droites* si pour toute droite (D) de $\mathscr{P}$, l'image $f(D)$ est aussi une droite de $\mathscr{P}$.

1. Soit f une bijection de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ préservant droites.
   (a) Soient M et N deux points distincts de $\mathscr{P}$. Montrer que l'image par f de la droite (MN) est la droite $(f(M)f(N))$.
   (b) Soient D et D' deux droites distinctes de $\mathscr{P}$. Montrer que $f(D) \cap f(D') = f(D \cap D')$.
   (c) Montrer que les droites $f(D)$ et $f(D')$ sont parallèles si et seulement si les droites D et D' sont parallèles.
   (d) Soient M, N, P et Q quatre points distinct de $\mathscr{P}$. Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme si et seulement si $f(M)f(N)f(P)f(Q)$ est un parallélogramme.
2. On considère une application affine bijective $g : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$.
   (a) Soient M, N, P trois points distinct de $\mathscr{P}$. Montrer que M, N et P sont alignés si et seulement si $g(M)$, $g(N)$ et $g(P)$ sont alignés.
   (b) Montrer que g préserve les droites.
3. Soient O', I', J' trois points non alignés de $\mathscr{P}$. Montrer qu'il existe une bijection affine g de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que $g(O) = O$, $g(I) = I'$ et $g(J) = J'$.
4. Soit f une bijection de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ préservant les droites, et telle que $f(O) = O$, $f(I) = I$ et $f(J) = J$.
   (a) Justifier l'existence de deux fonctions u et v, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que pour tous réels x et y, les images par f des points de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ ont respectivement pour coordonnées $\begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ v(y) \end{pmatrix}$.
   (b) Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. En utilisant la question 1.d, et en considérant le parallélogramme formé des points O, $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, montrer que $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(y) \end{pmatrix}$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On considère les points $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$. Montrer que $(f(A)f(B))$ et (IJ) sont parallèles, et en déduire que $u(x) = v(x)$.
   (d) Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. En utilisant la question 1.d, et en considérant le parallélogramme formé des points O, $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que $u(x+y) = u(x) + u(y)$.
   (e) Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. On considère les points $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}$. Montrer que les droites $(f(A)f(C))$ et $(If(B))$ sont parallèles, et en déduire que $u(xy) = u(x)u(y)$.
   (f) On admet que le seul automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'application identité (c'est un problème d'analyse...). En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}}$.
5. On se donne maintenant une bijection f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ préservant les droites.

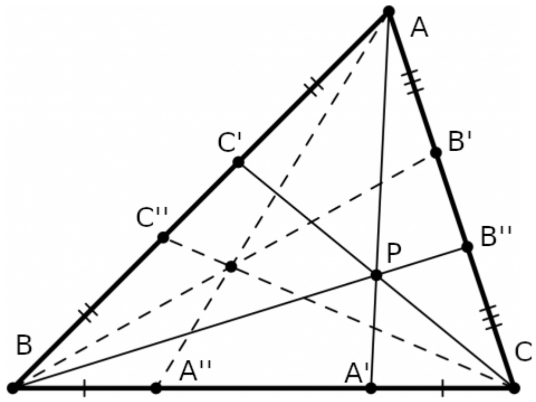
(a) Montrer, en utilisant la question 3 qu'il existe une bijection affine $g : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ telle que

$$(f \circ g)(O) = O, \quad (f \circ g)(I) = I, \quad (f \circ g)(J) = J.$$

(b) Montrer que $f \circ g$ préserve les droites, et en déduire que $f \circ g = \mathrm{id}$.

(c) Conclure que f est une bijection affine.

Exercice 2. Dans le plan euclidien, on se donne des points A, B, C non alignés, et P à l'intérieur du triangle ABC. On construit A', B', C', puis A'', B'', C'' comme sur dessin.



Montrer que (AA''), (BB'') et (CC'') sont concourantes.