Aix-Marseille Université	2021–2022

Parcours PEIP - L1

Géométrie et Polynômes

PLANCHE 5 - GÉOMÉTRIE.

Géométrie affine

Exercice 1. Le plan et l'espace étant rapportés à un repère orthonormé, vérifier que les repères suivants sont également orthonormés :

dimension 2 : $\overrightarrow{U}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{V}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

dimension 3 : $\overrightarrow{U}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, $\overrightarrow{V}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\overrightarrow{W}\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Exercice 2. On considère le plan rapporté à un repère orthonormé. Ecrire l'équation du cercle de centre $I = (1, -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 3. Soient $A(1, 2)$ et $B(-1, 3)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Quel est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux ?

Exercice 4. On considère les trois points $A(3, -1, -3)$, $B(2, 1, -2)$ et $C(-2, 2, 1)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$. Déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 5. Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. Montrer que

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0.$$

Que peut-on en déduire si, dans un tétraèdre, deux paires d'arêtes opposées sont formées d'arêtes orthogonales ? Que peut-on aussi en déduire si dans un quadrilatère plan, les côtés opposés sont perpendiculaires?

Dessiner un tel quadrilatère.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(1, 0, 1)$; $\vec{v}(2, 1, 0)$ et $\vec{w}(1, -1, 2)$.

Calculer $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ et $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$. Qu'en déduit-on pour le produit vectoriel ?

Exercice 7. Soient A, B, C et D quatre points quelconques de l'espace orienté. Montrer que

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BC}.$$

Exercice 8. On considère le plan P de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$.

1. Donner les composantes d'un vecteur orthogonal à P.
2. En déduire l'équation paramétrique de la droite passant par $A = (1, 1, 1)$ et orthogonale à P.
3. Calculer la distance du point A au plan P.

Exercice 9. On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à son repère canonique. On donne la droite D d'équations paramétriques :

$$x = 1 + \frac{t\sqrt{6}}{6} \qquad y = \frac{t\sqrt{6}}{6} \qquad z = \frac{2t\sqrt{6}}{6};$$

et la droite Δ d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} .$$

Calculer le cosinus de l'angle aigu entre ces deux droites.

Exercice 10. Soient $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 0)$ et $C(2, 2, 1)$ trois points de l'espace.

1. Vérifier que ces points ne sont pas alignés.
2. Calculer l'aire du triangle ABC. En déduire la valeur absolue du sinus de l'angle $\widehat{ABC}$.
3. Donner un vecteur de norme 1 orthogonal au plan P défini par les points A, B et C.

Exercice 11.

Soit $\mathcal{P}$ le plan de l'espace euclidien contenant les points $A(1; -1; 0), B(2; 1; 1)$ et $C(3; 1; -1)$.

1. Donner les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Prouver que D appartient à $\mathcal{P}$ comme intersection de deux droites de $\mathcal{P}$.
3. Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$.
4. Soit θ l'angle aigu et non-orienté entre les droites (AB) et (BC). Montrer que $\pi/6 < \theta < \pi/2$.
5. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
6. Donner une équation paramétrique de la droite (D) orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par le point C.
7. Donner la distance de l'origine $O(0; 0; 0)$ au plan $\mathcal{P}$.

Complexes et géométrie

Exercice 12. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition:

$$|z-4| = |z+2i|.$$

Exercice 13.

1. Déterminer l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$.
2. Déterminer l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (*indic. on pourra écrire z sous la forme $x+iy$*)

Exercice 14. Déterminer l'ensemble des nombres complexes non nuls tels que z, $1/z$, et $z-1$ aient le même module.

Exercice 15. Soit z un nombre complexe et M, le point du plan d'affixe z.

1. Posons $Z = z^2 + 2z - 3$. Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit réel.
2. Soient les points A et B d'affixes respectives i et 1. On suppose M distinct de A. On pose $Z = \frac{1-z}{i-z}$. Déterminer l'ensemble E des points M tels que Z soit réel, et l'ensemble F des points M tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 16. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition:

$$z + \frac{4}{z} \in \mathbb{R}\ .$$

Extrait DS4 2020-21. (6pts)

Exercice 17.

Soit P le plan d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - s \\ z = t - 2s \end{cases} \qquad \text{avec } (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

1. Est-ce que l'origine $O(0,0,0)$ appartient à P ?
2. Vérifier que $B(1,1,-2)$ et $C(0,2,1)$ sont des points de P.
3. Déterminer une équation cartésienne de P.
4. Donner une équation paramétrique de la droite Δ passant par B et orthogonale à P.
5. Calculer la distance du point $D(0,3,-3)$ au plan P de deux manières :

   (i) en utilisant la formule du cours

   (ii) en remarquant que $D \in \Delta$.

Extrait DS4 2020-21. (9pts)

Exercice 18.

Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique, on considère les trois points $A(1;-1;3)$, $B(2;-2;5)$ et $C(2;2;4)$.

1. Prouver que les points A B et C définissent un plan P_1 dont on déterminera une équation cartésienne et paramétrique.

2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.

3. a) Prouver de deux manières que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux .

   b) En déduire la nature du triangle ABC ainsi qu'une autre manière de calculer $\mathcal{A}$.

4. Soit Δ_a la droite d'équation $\begin{cases} -7x + y + 4z - 4 = 0 \\ ax - y \qquad\quad + 4 = 0 \end{cases}$, où $a \in \mathbb{R}$.

   a) Calculer un vecteur directeur $\overrightarrow{u_a}$ de Δ_a et en déduire que la seule valeur du paramètre a pour laquelle Δ_a est parallèle à la droite (AB) est $a_0 = -1$.

   On note Δ la droite Δ_{-1}.

   b) Donner une équation paramétrique de Δ après avoir vérifié que $C \in \Delta$.

   c) Déterminer une équation cartésienne du plan P_2 orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ passant par le point B.

   d) Calculer les coordonnées du point D intersection entre Δ et P_2.

   (*on pourra "injecter" l'équation paramétrique de Δ "dans" l'équation cartésienne de P_2*).

   e) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

5. (*Hors Barème*) (3pts)

   a) Déterminer une équation de la sphère S de diamètre $[BC]$.

   b) Vérifier que $A \in S$ et imaginer un résultat général :

   "La sphère S de diamètre $[BC]$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont ..."

   c) Démontrer ce résultat.

Extrait DS3 2019-20. (7pts)

Exercice 19.

(a) Justifier que, pour tout réel α , les équations cartésiennes suivantes sont celles de deux plans de $\mathbb{R}^3$,

notés $\mathcal{P}_\alpha$ et $\mathcal{P}'_\alpha$:

- $\mathcal{P}_\alpha \,:\, x - \alpha y + (\alpha - 1)z - \alpha\sqrt{6} = 0$
- $\mathcal{P}'_\alpha \,:\, \alpha x + y + z = 0.$

(b) (a) Que représentent les vecteurs $\overrightarrow{n_\alpha} = (1, -\alpha, \alpha - 1)$ et $\overrightarrow{n'_\alpha} = (\alpha, 1, 1)$ pour les plans $\mathcal{P}_\alpha$ et $\mathcal{P}'_\alpha$?

(b) Prouver que $\mathcal{P}_\alpha$ et $\mathcal{P}'_\alpha$ sont sécants pour toute valeur de α. Quelle est la nature de cette intersection ?

(c) Soit le point A (1, 1, 1). Calculer, en fonction de α, les distances d et d' de A à $\mathcal{P}_\alpha$ et $\mathcal{P}'_\alpha$ respectivement.

(d) Pour quelle valeur de α les plans $\mathcal{P}_\alpha$ et $\mathcal{P}'_\alpha$ sont-ils perpendiculaires ?

(*On rappelle que deux plans sont perpendiculaires lorsque leurs normales sont orthogonales.*)

On fixe α à cette valeur pour la suite du problème et on note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ les deux plans.

(e) Calculer les valeurs numériques de d et d'. Que constate-t-on ?

(f) (a) Vérifier que le point $B(0, -\sqrt{6}, \sqrt{6})$ appartient à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{P}'$.

(b) Déterminer une équation paramétrique de l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, notée Δ.

(g) (a) Justifier qu'il existe un unique plan $\mathcal{P}''$ contenant Δ et A.

(b) Donner une équation paramétrique de ce plan, ainsi qu'une équation cartésienne.

Extrait DS3 2018-19. (7pts)

Exercice 20.

Dans $\mathbb{R}^3$ rapportéà un repère orthonormé direct, on considère les quatre points : $A(1,-1,2)$, $B(2,0,2)$, $C(0,-1,-1)$ et $D(-1,-1,1)$.

(a) Justifier que ABC est un triangle non aplati dont on calculera l'aire.

(b) En déduire que A, B et C déterminent un plan $\mathcal{P}$ dont on donnera une équation cartésienne.

(c) Montrer que l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.

(d) Calculer la distance du point D au plan $\mathcal{P}$.

(e) Soit $\mathcal{P}'$ d'équation $x+y-z=2$.

   i. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite Δ orthogonale à $\mathcal{P}'$ passant par D.

   ii. Calculer les coordonnées du point H d'intersection entre Δ et $\mathcal{P}'$.

   iii. Que représente DH ? Le point D est-il plus près de $\mathcal{P}'$ que de $\mathcal{P}$?

Extrait DS4 2015-16. (8pts)

Exercice 21. L' espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

(a) Soient $A(2,-2,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(1,3,-3)$ trois points.

   i. Montrer que les points A, B et C définissent un plan P.

   ii. Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne de P.

   iii. Déterminer l'équation paramétrique de la droite Δ orthogonale à P passant par le point $D(3,2,1)$.

   iv. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de D sur le plan P et calculer la distance de D à P de deux manières.

(b) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ un nombre réel et P_α de représentation paramétrique, avec paramètres t, $t'\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = 1 \qquad\quad - t' \\ y = 2 - 2t + \alpha t' \\ z = 1 + \alpha t - t' \end{cases}$$

   i. Vérifier que, quel que soit α, les vecteurs $\vec{u}=(0,-2,\alpha)$ et $\vec{v}=(-1,\alpha,-1)$ ne sont pas colinéaires. Qu'en déduit-on pour P_α?

   ii. Prouver qu'une équation cartésienne de P_α est : $(\alpha^2-2)x+\alpha y+2z-\alpha(2+\alpha)=0$.

   iii. Déterminer l'ensemble des $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que les plans P et P_α ont un vecteur normal commun.

   iv. Déterminer l'ensemble des $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que $B\in P_\alpha$.

   v. Existe-t-il $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que les plans P et P_α soient confondus ?