Aix–Marseille Université	**2021–2022**
PEIP 1A	**Géométrie & Polynômes**

PLANCHE 4

Polynômes

Exercice 1. Soit $P_a = (1-a^4)X^3 + (a^2-3a+2)X^2 + (a-1)X + (a-2)$.
Discuter suivant les valeurs du paramètre réel a, le degré de P_a, et donner dans chaque cas, le coefficient dominant, le terme de plus haut degré et le terme constant.
Pour quelle(s) valeur(s) de a le polynôme P_a est-il unitaire ?
Existe-t-il une valeur de a telle que P_a soit un monôme ? Et pour que P soit impair ?

Exercice 2. Soient $P_3 = (X+1)^3 - (X-1)^3$, $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$ et $Q_n = (X+1)^n + (X-1)^n - 2X^n$.
Calculer leur degré, leur coefficient dominant et leur terme constant.

Exercice 3.
1) Déterminez tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(1) = P(2) = 0$ et $\deg(P) \leq 3$.

2) Déterminez tous les polynômes Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que $Q(1) = Q'(1) = 0$ et $\deg(Q) \leq 4$.

3) Déterminez le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que $P(0) = 1$, $P'(0) = 2$ et $P''(0) = 5$.

4) Déterminez le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que :
$P(1) = 3$, $P'(1) = 2$, $P''(1) = -1$ et $P^{(k)}(1) = 0$ pour tout $k \geq 3$.

Exercice 4. Déterminer $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 5. Montrer que $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans ce polynôme.

Exercice 6. Développer $X^n = (X+1-1)^n$ à l'aide de la formule du binôme. En déduire une expression du reste et du quotient de la division euclidienne de X^n par $X+1$.

Exercice 7. Trouver les restes des divisions euclidiennes de $(X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par $(X-3)(X-2)$, $(X-2)^2$ et $(X-3)^2(X-2)^2$.

Exercice 8. (*) **Relations coefficients-racines**

Considérons le polynôme $X^2 + bX + c$, et ses deux racines λ_1 et λ_2.
1) Exprimez en fonction de b et c la somme des racines $\lambda_1 + \lambda_2$. Faire de même pour le produit des racines $\lambda_1\lambda_2$.

2) On cherche à résoudre le système d'équations $\begin{cases} u+v=3 \\ u\,v=-2 \end{cases}$

a) Montrer que u et v sont les deux racines du polynômes X^2-3X-2.
b) Résoudre le système d'équations.

3) Appliquer la même méthode pour le système $\begin{cases} u+v=1+i \\ u\,v=i \end{cases}$

Exercice 9. (*) **Polynômes bi-carrés**

1) Soient P et Q deux polynômes tels que $P=Q(X^2)$.
Si α est racine de P, qu'en déduit-on ?
Et inversement, si β est une racine de Q, qu'en déduit-on ?

2) Considérons le polynôme : $P(X)=X^4+bX^2+c$.

Trouver un polynôme Q de degré 2 tel que $Q(X^2)=P$. Quelles sont les racines de Q ? En déduire les racines de P.

3) Application : a) Quelles sont les racines de X^4-3X^2+1 ?
b) Quelles sont les racines de X^6-3X^3+2 ?

Exercice 10. On considère le polynôme $P(X)=X^4-4X^2+8X-4$.
Calculez $P(1+i)$. Déterminez les racines de P dans $\mathbb{C}$.

Exercice 11. Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ des polynômes ci-dessous puis écrire leur décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$; en déduire leur décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$:

i) X^2+X+1	iii) $X^3-7X^2+14X-8$	v) X^6+1
ii) X^4+X^2+1.	iv) X^3+X^2+X+1	vi) X^3+c, pour $c\in\mathbb{R}$.

Exercice 12. (*) **Polynômes de Chebyshev**
Les polynômes de Chebyshev sont définis par récurrence de la manière suivante:

$$\begin{cases} P_0=1, & ,P_1=X \\ \forall n\geq 1, & P_{n+1}=2X\,P_n-P_{n-1} \end{cases}$$

1) Calculer P_2,P_3,P_4.
2) Déterminer (par récurrence) le degré de P_n, et son coefficient dominant.
3) Exprimer $\cos(2\theta)$ en fonction $\cos(\theta)$, comparer avec $P_2(\cos(\theta))$.
4) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall\theta\in\mathbb{R}, P_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$.

Sn : d°Pn=n récurrence forte on suppose que Pn et P(n-1) sont de degré resp n et n-1, et on va prouver que Pn+1 est de d°=n+1

Exercice 13. (*) On considère le polynôme $P(X) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^{2p}$.

1) Donnez une expression simple de $P(X)$. Déterminez son degré, ses racines, et la multiplicité de chacune.

2) En utilisant la question précédente, donnez une expression simple du polynôme suivant:

$$Q(X) = \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} 2p X^{2p-1}.$$

3) Développer $(1 + X^2)^{n-1}$ par la formule du binôme. En déduire que $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p \leq n$.

soit P € IR[X], P(1)=P(1) donc P R1 P cad R1 est reflexive
soit P et Q ds IR[X], tq PR1Q alors P(1)=Q(1)
donc Q(1)=P(1) donc QR1P et R1 est symétrique
Soit P,Q,S ds R[X] tq PR1Q et QR1S.
on a alors P(1)=Q(1)
et Q(1) =S(1) donc P(1)=S(1) d'où PR1S
et R1 est transitive

Exercice 14. *Extrait DS3 2018-19* *Relations* (3pts)

On définit les trois relations sur $\mathbb{R}[X]$ en posant : $\forall\, P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

- $P\,\mathcal{R}_1\,Q$ lorsque $P(1) = Q(1)$
- $P\,\mathcal{R}_2\,Q$ lorsque $P(1) = Q(1)$ et $P'(1) = Q'(1)$
- $P\,\mathcal{R}_3\,Q$ lorsque $\deg(P) \leq \deg(Q)$.

P € cl(X-1) <=> P R1 (X-1) <=> P(1)=0 <=> (X-1) divise P <=> il existe Q tq P= (X-1)Q
Cl_1(X-1) = { P € IR[X] / P R1 (X-1)}= {P€IR[X] / P s'annule en 1}
= {P… / P est divisible par X-1} = {(X-1)Q / Q € IR[X] }

1. Vérifier que $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont des relations d'équivalence.

2. (a) Déterminer $\mathrm{Cl}_1(X-1)$ la classe d'équivalence du polynôme $X - 1$ pour la relations $\mathcal{R}_1$.
   Cl_2 [(X−1)^2]={ P € IR[X] / P(1)=0 et P'(1) =0}={P€IR[X] / 1 est racine au moins double de P } = {(X-1)^2 Q / Q € IR[X] }
   (b) Si $P_0 \in \mathbb{R}[X]$, quelle inclusion a-t-on entre ses classes $\mathrm{Cl}_1(P_0)$ et $\mathrm{Cl}_2(P_0)$ pour $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$?
   Cl_1(3) = { P€IR[X] / P R1 3 cad P(1)=3} Cl_2(3)= {P € IR[X] / P(1)=3 et P'(1)=0}

si on était sur IR_2[X] on aurait P de la forme aX^2+bX+c avec a+b+c=3 et 2a+b=0 cad b=-2a et c= 3+a d'où cl_2(3) = { aX^2-2aX +3+a/ a€IR}

3. Prouver que $\mathcal{R}_3$ n'est pas une relation d'ordre.

le seul P unitaire ds Cl_2(3) est X^2-2X+4

P € Cl_2(Po) => P(1)=Po(1) et P'(1)=P'o(1) => P€Cl_1(Po) donc Cl_2(Po) incluse dans Cl_1(Po)

A inclus dans B lorsque tout élément de A est aussi élément de B

Exercice 15. *Extrait DS3 2018-19* *Polynômes* (7,5pts)

R3 n'est pas antisymétrique, en effet : P= X^2+1 et Q= X^2-1. On a bien PR3Q car 2< = 2 et QR3P idem et Q≠P

1. **Préliminaires** (questions de cours)
   (a) Démontrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et α est une racine (complexe) de P, alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P.
   P € C[X] P=ao+…+anX^n, on note $\overline{P}$= …
   P bar (æ bar) =… = $\overline{P(æ)}$ = 0 donc æ bar racine de P bar or P est à coef réels donc P bar = P cqfd
   (b) Rappeler la définition de la multiplicité d'une racine a d'un polynôme Q.
   a est racine de Q de multiplicité m si (X-a)^m / Q et (X-a)^(m+1) ne / pas Q CAD il existe P tq Q= (X-a)^m P avec P(a)≠0

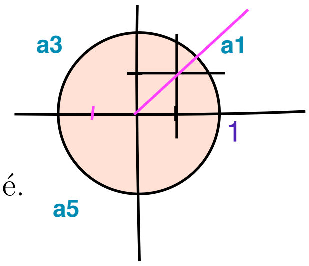
2. Soit $P_1 = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 16X + 16$.
   les puissances de 2i
   (a) Calculer $P_1(2i)$ (on posera le calcul explicite).
   (b) En s'appuyant sur les résultats préliminaires, écrire P_1 comme produit de deux polynômes de degré 2.
   grâce à a) 2i est racine de P1 et grâce au a) des préliminaires -2i est aussi racine donc (X-2i)(X+2i) divise P1 cad il existe Q tq P=(X-2i)(X+2i)Q
   (c) Déterminer la décomposition de P_1 en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$.
   or (X-2i)(X+2i) =X^2+4 de degré 2 donc Q est de degré d°P-2=2 (prop sur degré et produit)

De plus P=(X^2+4)(X^2+4X+4) (obtenu de tête !) ou par DE

X^2+4 est irréductible sur IR[X] et X^2+4X+4 = (X+2)^2 bref P= (X+2)^2 (X^2+4) sur IR[X]
et = (X+2)^2 (X-2i)(X+2i) sur C[X]

Q= X^4+1/4

1+i= √2 e^i{π/4}



(d) En déduire les racines de P_1 dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$, avec leur multiplicité.

3. Soit $P_2 = X^8 + 4X^7 + 8X^6 + 16X^5 + \frac{65}{4}X^4 + X^3 + 2X^2 + 4X + 4$. = QP1 avec R=0

(a) Effectuer la Division Euclidienne de P_2 par P_1. Qu'en déduit-on ? P1 / P2

4√=√√

(b) Donner la décomposition de P_2 en produit de polynômes irréductibles

car les racines de P2 sont celles de P1 réunies avec celles de Q

sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$, *en remarquant que* $\sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1 on connait les Racines de P1

2 cherchons les racines de Q

E<=> p4ei ^œ=… <=>

p^4= 1/4 et 4œ = π [2π]

Z^4+1/4=0 <=> Z^4= 1/4 e^{iπ}

on pose Z=pe^iœ, avec p>0, œ€[0,2π[

Exercice 16. *Extrait DS3 2017-18*

On considère le polynôme $P = X^8 - 6X^7 + 14X^6 - 9X^5 + 3X^3 - 18X^2 + 42X - 27$.

1. Montrer que P est divisible par $X^5 + 3$.

<=> p=1/√2 et œ= π/4 [π/2]

2. Donner les racines de $X^5 + 3$.

<=> Z€ {1/√2e^{iπ/4}, 1/√2 e^i{3π/4}, 1/√2 e^i{5π/4}, 1/√2 e^i{7π/4}

a1 a3 a5 a7

3. Déterminer les racines complexes de P. Combien d'entre elles sont réelles ?
4. En déduire la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$.

donc sur C[X] P2= (X+2)^2(X-2i)(X+2i)(X-a1)(X-a3)(X-a5)(X-a7)

et sur IR[X] P2= (X+2)^2 (X^2+4) (X^2-2 Re(1/√2 e^i{π/4} X + 1/2) (X^2-2Re(1/√2 e^i{3π/4} X + 1/2)

Exercice 17. *Extrait DS2 2016-17* (6pts)

Re(1/√2 e^i{π/4})= 1/√2 √2/2= 1/2

On considère le polynôme de $\mathbb{R}[X]$

P=(X+2)^2(X^2+4)(X^2-X+1/2)(X^2+X+1/2) !!

$$P = X^8 + 3X^7 + 3X^6 + X^5 + X^3 + 3X^2 + 3X + 1 \, .$$

1. Prouver que -1 est racine de P de multiplicité au moins 3.
2. Déterminer deux polynômes P_1 et P_2 tels que $P = P_1^3 P_2$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^5 = -1$. *(on représentera grossièrement les solutions dans le plan complexe).*
4. En déduire la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$.
5. Donner la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.
6. Quelle est la multiplicité de la racine -1 dans P ? (Justifiez votre réponse).

degré 3 à racine évidente

Exercice 18. *Extrait DS3 2016-17* (4pts)

P=(X^4-i)Q de degré 2

On considère le polynôme de $\mathbb{C}[X]$

$$P = X^6 - (4 + 3i)X^5 + (1 + 7i)X^4 - iX^2 + (4i - 3)X + (7 - i) \, .$$

Z^4=i

1. Effectuer la division euclidienne de P par le polynôme $X^4 - i$. Qu'en déduit-on ?
2. Déterminer la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$.

degré 2 : aZ^2+bZ+c=0 Δ juste ! ∂… verif ∂^2=Δ Z1 Z2

degré qcq de la forme Z^n=Zo=Ro e^{iŒo}

P= X^5-X^4-4X^2+7X-3
=(X-1)(X^4-4X+3)=(X-1) (X-1) (X^3+X^2+X-3)=(X-1)^3(X^2+2X+3)

Δ = 4-4x3=-8 = (2i√2)^2

$$x1 = \frac{-2+2i\sqrt{2}}{2} = -1+i\sqrt{2}$$

x2= -1- i√2

P=(X-1)^3 (X+1-i√2)(X+1+i√2) sur ¢[X]
P= (X-1)^3(X^2+2X+3)

Q=(X+1)^2 (X^2+2X+3)^2

F (X-1)^3/(X+1)^2(X^2+2X+3) = E + a/(X+1) + b/(X+1)^2 + (cX+d) / (X^2+2X+3)

P=(a^2-4)X^4+(a+2)X^2+(a+2)X+(a-2)

— a≠2,-2 a^2-4≠0 d°=4
— a=2 d°=2, coef d =4 coef ct=0
— a=-2 P=-4 d°=0 coef d = -4 = t ct