Aix-Marseille Université 2022–2023

Mathématiques I - PEIP

PLANCHE 3

NOMBRES COMPLEXES

Pour s'entrainer aux calculs élémentaires sur les complexes

Exercice 1. Mettre les nombres complexes qui suivent sous forme polaire:

$$1+i \qquad 1+i\sqrt{3} \qquad -3$$
$$4i \qquad -5i \qquad \sqrt{2}-i\sqrt{6}$$

Exercice 2. Mettre les nombres complexes qui suivent sous forme cartésienne (ou algébrique):

$$e^{i\pi} \qquad e^{2i\pi/3} \qquad e^{-3i\pi/4} \qquad e^{i\pi/2}$$
$$e^{5i\pi/2} \qquad e^{2i\pi/7} \qquad e^{ln(2)i\pi} \qquad e^{i}$$

Exercice 3. Exprimer les nombres complexes suivants sous forme cartésienne:

$$(-1+3i)^{-1} \qquad (1+i)(1-i) \qquad (i+1)(i-2)(i+3)$$
$$(1+i)i(2-i) \qquad (2i+1)\pi i \qquad (7+\pi i)(\pi+i)$$
$$\frac{1}{3+i} \qquad \frac{2+i}{2-i} \qquad \frac{2i}{3-i}$$

Exercice 4. Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants et donner leur forme cartésienne :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}, \quad \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}, \quad \left(\frac{2+2i}{1-i}\right)^{20}, \quad \frac{-2}{1-i\sqrt{3}}$$

Exercice 5. Soient $a = 2\sqrt{6}(1+i)$ et $b = \sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$. Déterminer les formes polaires de a et b. Déterminer les formes cartésiennes et polaires du nombre complexe $\frac{a}{b}$.

En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et de $\sin(\pi/12)$.

Exercice 6. Trouver les racines carrées de $3-4i$, $24-10i$, $5+12i$.

Exercice 7. Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Comment feriez-vous pour calculer $\cos(\pi/16)$ et $\sin(\pi/16)$?

Exercice 8. (*) Soient deux nombres complexes z et z' de module 1. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

Exercice 9. Écrire sous forme polaire, les deux nombres complexes $z_1 = 1-i, \qquad z_2 = 1+i\sqrt{3}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^4 = \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ et $z^6 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

Exercice 10. Résoudre $(z-i)^5=(z+i)^5$. Exprimer les solutions à l'aide de la fonction cotangente et en déduire qu'elles sont réelles. Quel est leur nombre ? Pouvait-on prévoir le résultat ?

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

1. $z^2+z-2=0$. 3. $4iz^2+2(1+6i)z+2(-1+7i)=0$
2. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)+1=0$ 4. $z^4-(1-i)z^2-i=0$

Exercice 12.

1. Soient α et β deux nombres réels.
   - Mettre $e^{i\alpha}+e^{i\beta}$ sous la forme ue^{iv} avec u et v réels. (*indic. on factorisera par* $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.)
   - A quelle condition u est-il le module de $e^{i\alpha}+e^{i\beta}$? Dans ce cas, que représente v ?
   - Dans le cas contraire, que vaut le module de $e^{i\alpha}+e^{i\beta}$? Quel est un argument de $e^{i\alpha}+e^{i\beta}$?
2. Soit $\theta \in [0,2\pi[$.

   a) Mettre sous la forme ue^{iv} les nombres $1+e^{i\theta}$, $-1+\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{2i\theta}$.

   b) (*) En déduire le module et l'argument de $1+e^{i\theta}$ en discutant selon les valeurs de θ.

   c) (*) Même question pour $-1+\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{2i\theta}$.

Exercice 13. (*) x et α étant deux nombres réels, calculer les sommes : $C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(x+\alpha k)$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(x+\alpha k)$. (*indic. On pensera à calculer* C_n+iS_n.)

——— *Extrait du DS2 de l'année 2021-2022* ———

Exercice 14. *Complexes (3pts)*

On pose $z_0=-8(1-i\sqrt{3})$.

1. Ecrire z_0 sous forme polaire et représenter $\frac{z_0}{|z_0|}$ dans le plan complexe.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^4=z_0$.
3. Représenter sommairement (mais proprement) les solutions dans le plan complexe.

Exercice 15. *Complexes (3pts)*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iZ^2+2Z+4+2i=0$.
2. a) Calculer z_1+z_2 ainsi que z_1z_2 , où z_1 et z_2 sont les deux complexes solutions. [0,5]

   b) Déterminer les coefficients du polynôme $P=i(X-z_1)(X-z_2)$. [1]

———— Extrait du DS2 de l'année 2020-2021 ————

Exercice 16. *Complexes (4 pts)*

Soient a et b des nombres complexes avec $a \neq b$ et $|a| = |b| = 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit
$$Z = \frac{z + ab\overline{z} - (a+b)}{a-b}.$$

1. (1pt) Déterminer $\overline{a}$ en fonction de a et $\overline{b}$ en fonction de b (*on pourra penser à l'écriture en polaire*).
2. (2pts) Calculer $\overline{Z}$ et simplifier au maximum la fraction obtenue.
3. (0,5) **a)** Comparer $\overline{Z}$ et Z.

   (0,5) **b)** Qu'en déduit-on sur la partie réelle de Z ?

———— Extrait du DS2 de l'année 2018-2019 ————

Exercice 17. **(2pts)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}z^2 + (1-3\mathrm{i})z - 6 + 2\mathrm{i} = 0$.

Exercice 18. **(4 pts)** Soit $z_0 = -4\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$ et $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

1. Donner les racines cubiques de z_0.
2. (a) Ecrire z_1 sous forme cartésienne puis sous forme polaire.

   (b) En déduire les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$.
3. Ecrire sous forme cartésienne la racine cubique de z_0 dont l'argument principal est dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, sans cosinus ni sinus. *(Indication. On pourra utiliser la question 2.(b))*

Exercice 19. **(6 pts)**

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, • $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1 = 2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ • $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1 = 2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.
2. (a) Déterminer les solutions complexes de l'équation $(1+z)^7 = (1-z)^7$.

   (On montrera que ces solutions sont des imaginaires purs et on les écrira sous forme cartésienne)

   (b) Pouvait-on prévoir le nombre de solutions ?

———— Extrait du DS3 de l'année 2017-2018 ————

Exercice 20. (5pts)

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0$.

1. Donner une racine carrée des nombres complexes suivants : $-2i$; $5-12i$ et $(-3-4i)$; déduire de cette dernière une racine carrée de $-75-100i$.
2. Déterminer les racines du polynôme $X^2 - (5-14i)X - 2(12+5i)$.
3. Résoudre (E).