Aix-Marseille Université 2022–2023

Parcours PEIP - L1
UE Géométrie et Polynômes

PLANCHE 2 - SUITES RÉELLES

Exercice 1. Ecrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes :

a. La suite $(y_n)_n$ est minorée par -3 et à partir d'un certain rang, elle est aussi majorée par 12.

b. La suite $(x_n)_n$ est majorée mais pas minorée.

c. La suite $(u_n)_n$ n'est pas bornée.

d. La suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers -1.

e. La suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

Exercice 2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? On justifiera les réponses :

a. Si $(u_n)_n$ est à termes positifs et converge vers zéro, alors $(u_n)_n$ est décroissante.

b. Si une suite réelle est encadrée par deux suites convergentes alors elle est convergente.

c. Si $(|u_n|)_n$ converge vers l, alors $(u_n)_n$ converge vers l ou vers $-l$.

d. Si $\lim u_n = l$ avec $l > 0$ alors $(u_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang.

e. Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.

f. La relation $(x_n)_n \mathcal{R} (y_n)_n$ lorsque $\lim\limits_{+\infty}(x_n - y_n) = 0$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

g. Si une suite réelle est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors elle converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 3. Etudier la convergence des suites ci-dessous et quand elles convergent, déterminer leur limite quand cela est possible:

1. $\dfrac{1}{n}\sin(n)$
2. $n^4(\cos(n) - 2)$.
3. $2\cos(n) + 3(-1)^n - 3n$.
4. $\dfrac{3n + 5(-1)^n}{2n}$, $n \geq 1$.
5. $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, $n \geq 1$.
6. $\dfrac{\sqrt{(1-n)^2+1}}{1-n}$, $n \geq 2$.
7. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, $n \geq 1$.
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
   (penser à majorer le terme général par une somme télescopique, i.e. $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)$*)*

Exercice 4. $(u_{n+1} = f(u_n))$

a. Justifier que l'on peut définir une suite $(u_n)_n$ en posant :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}\ .$$

b. Montrer que $(u_n)_n$ ne peut converger que vers un seul nombre l que l'on déterminera.

c. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq l$.

d. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{P(u_n)}{\sqrt{1+u_n} + u_n}$, où P est un polynôme de degré 2 que l'on déterminera et dont on étudiera le signe.

e. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

f. Prouver que $(u_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 5. $(u_{n+1} = f(u_n))$

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

1. Étudier la fonction f.

   Vérifier en particulier que : $\forall x \geq \sqrt{2},\ \ f(x) \geq \sqrt{2}$. En déduire un intervalle de stabilité de f.

2. Soit $u_0 \geq \sqrt{2}$. Justifier que l'on peut définir la suite $(u_n)_n$ en posant : $\forall n \geq 0,\ \ u_{n+1} = f(u_n)$.

   a. Montrer par récurrence que: $\forall n \geq 0, u_n \geq \sqrt{2}$.

   b. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

   c. Conclure que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 6. (Suite géométrique)
Déterminer, suivant les valeurs du réel a, la convergence de la suite définie par : $u_n = a^n$.

Exercice 7. (Suite Arithmético-géométrique)

Soit $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 5$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} := 2u_n - 3\,$. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 8. (Sous-suites)

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Montrer les résultats suivants :

a. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite, alors $(u_n)_n$ converge vers la limite commune.

b. Si les sous-suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent respectivement vers l, l', l'', alors $l = l' = l''$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 9. Soient $(u_n)_n = (\sqrt{n})_n$ et $(v_n)_n = (\ln n)_n$.

a. Montrer que u et v tendent vers $+\infty$ et que $\lim(u_{n+1} - u_n) = \lim(v_{n+1} - v_n) = 0$.

b. En conclure que $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ n'est pas une condition ... pour que $(a_n)_n$ soit convergente.

Exercice 10. (Divergence de la série $\sum \frac{1}{n}$)

On considère la suite $(u_n)_n$, définie pour $n \geq 1$, par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, *appelée suite des sommes partielles.*

a. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.

b. Montrer que $(u_{2n} - u_n)_n$ est minorée par un réel strictement positif.

c. En déduire que $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 11. (Suites adjacentes)

Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites définies par:

$a_0 = a$, $b_0 = b$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

i) Démontrer par récurrence que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont bien définies et à termes positifs.

ii) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n$.

iii) Prouver que $(a_n)_n$ est croissante et que $(b_n)_n$ est décroissante.

iv) En déduire que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes et que $\lim(a_n) = \lim(b_n)$.

(*Cette limite commune est appelé moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b.*)

Exercice 12. (Suites adjacentes)

Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$ sont adjacentes.

En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)_n$ converge.

Exercice 13. (Suites adjacentes)

Soit $(v_n)_n$ une suite strictement positive, croissante, qui converge vers $+\infty$. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{v_k} = \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} - \cdots + \frac{(-1)^n}{v_n}.$$

a. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes.

b. Conclure à la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 14. Soit x un réel. On rappelle que $E(x)$ est définie par: $E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$ c'est-à-dire que $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

a. Calculer $E(3)$, $E(1,5)$, $E(-1/10)$, $E(e)$ et tracer le graphe de la fonction E.

b. Donner un encadrement de $E(x)$ en fonction de x. En déduire $\lim nE\left(\frac{1}{n}\right)$.

d. Soit $x \in \mathbb{R}$; calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(x) + E(2x) + E(3x) + \cdots + E(nx)}{n^2}.$$

e. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Donner une CNS pour que la suite $(E(u_n))_n$ converge.

Extrait DS1 2018- 2019

Exercice 1: Questions de cours (4pts)

1. (a) Donner la définition de deux suites adjacentes.
   (b) Les suites $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(1 - \frac{1}{2n}\right)_{n\geq 1}$ sont-elles adjacentes ?
   (c) Même question avec $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)_{n\geq 1}$.
2. (a) Enoncer le théorème des gendarmes pour trois suites numériques.
   (b) Le démontrer en revenant à la définition de la convergence d'une suite.

Exercice 5 (3pts)

Soit $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.

Soit $I = [0, 1]$ et $a \in I$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :
$$u_0 = a \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} .$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
2. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Extrait DS2 2018- 2019

Exercice 4 (3pts) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Qu'en déduit-on ?