Aix-Marseille Université 2021–2022

Parcours PEIP - L1

UE Géométrie et Polynômes

PLANCHE 1 - LOGIQUE, RELATIONS D'ÉQUIVALENCE, RELATIONS D'ORDRE

I. Un peu de logique

Exercice 1 Dans un village, le barbier rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. Expliquer ce que la situation a de paradoxal. (*Par exemple, trouver une question qui n'a pas de réponse*).

Exercice 2 Exprimer les propositions suivantes à l'aide du formalisme mathématique et écrire leur négation :

ATTENTION : le " si ...alors ..." du langage courant est souvent confondu avec un " ... si et seulement si..." mais là, nous faisons des mathématiques !...

— Jean porte un bonnet ou une écharpe ;
— Lorsque le temps est maussade, Jean porte un bonnet ou une écharpe ;
— Pierre met un pull et un manteau ;
— Lorsqu'il fait froid, Pierre met un pull et un manteau ;
— Il fait froid et Pierre n'a pas mis son manteau.
— S'il fait beau, nous allons à la plage.
— Nous n'allons à la plage que s'il fait beau.
— S'il fait beau et si l'eau est chaude, nous baignons les enfants.
— Si tu es sage, tu auras une image.
— Tu auras une image si et seulement si tu es sage.

Exercice 3 Soit la proposition $\mathscr{P}$: "Les lions et les crocodiles sont des bêtes féroces".

1. Ecrire la proposition $\mathscr{P}$ à l'aide du formalisme mathématique en introduisant trois propositions bien choisies (comme L : " être un lion ") et en utilisant une implication.
2. Peut-on déduire de $\mathscr{P}$ que :
   — Si on est un lion, alors on est féroce
   — Si on n'est pas un crocodile, alors on n'est pas féroce
   — Si on n'est pas féroce, alors on n'est ni un lion, ni un crocodile
   — Si on est féroce mais que l'on est pas un lion, alors on est un crocodile
3. Ecrire la négation de $\mathscr{P}$, sa contraposée, ainsi que sa réciproque. Dire si chacune est vraie (*la proposition* $\mathscr{P}$ *étant supposée vraie*).

Exercice 4 α, β, x et y sont des réels et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Remplir les pointillés avec $\Longleftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, ou encore $\times$ lorsqu' aucune des implications n'est possible ; justifier les choix.

1. $\alpha \leqslant \beta \ \dots \ \alpha^2 \leqslant \beta^2$.
2. $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \ \dots \ \alpha^2 \leqslant \beta^2 \ \dots \ (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) \leqslant 0$.
3. $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \ \dots \ 0 \leqslant \sqrt{\alpha} \leqslant \sqrt{\beta} \ \dots \ \alpha \leqslant \beta$.
4. $x = y \ \dots \ f(x) = f(y)$.

Exercice 5 *Trois types de raisonnement*

Soient A, B, C trois propositions. Montrer, en utilisant : $A \Rightarrow B \iff ((\text{non}\, A)\, \text{ou}\, B)$, que :

1. $(A \Rightarrow B) \iff (\text{non}\, B \Rightarrow \text{non}\, A)$. (raisonnement par contraposition)
2. $\big[(A\, \text{et non}\, B) \Rightarrow (C\, \text{et non}\, C)\big] \iff (A \Rightarrow B)$. (raisonnement par l'absurde)
3. $(A \Leftrightarrow B) \iff (A \Rightarrow B)\, \text{et}\, (B \Rightarrow A)$. (raisonnement par double implication)

Exercice 6 *Quantificateurs universel et existentiel*

Pour x et y réels, soient $P(x)$, $Q(x)$, et $R(x, y)$ des propositions logiques qui dépendent de la variable x, ou des variables x, y. A-t-on les équivalences suivantes ? (*Justifier brièvement ou doner un contre-exemple*)

1. $\Big[\forall x, \Big(P(x) \text{ ou } Q(x)\Big)\Big] \iff \Big[\Big(\forall x\, P(x)\Big) \text{ ou } \Big(\forall x\, Q(x)\Big)\Big]$ 2. $\Big[\forall x, \Big(P(x) \text{ et } Q(x)\Big)\Big] \iff \Big[\Big(\forall x\, P(x)\Big) \text{ et } \Big(\forall x\, Q(x)\Big)\Big]$

3. $\Big[\exists x, \Big(P(x) \text{ ou } Q(x)\Big)\Big] \iff \Big[\Big(\exists x\, P(x)\Big) \text{ ou } \Big(\exists x\, Q(x)\Big)\Big]$ 4. $\Big[\exists x, \Big(P(x) \text{ et } Q(x)\Big)\Big] \iff \Big[\Big(\exists x\, P(x)\Big) \text{ et } \Big(\exists x\, Q(x)\Big)\Big]$

5. $\Big[\forall x, \ \Big(\exists y \ \ R(x, y)\Big)\Big] \iff \Big[\exists y, \ \Big(\forall x \ \ R(x, y)\Big)\Big]$

Exercice 7 Soient x un réel et n un entier. Démontrer par contraposée les assertions suivantes :

1. $x^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad x < 2$;
2. si $n^2 - 1$ n'est pas un multiple de 8 alors n est pair.

Exercice 8 Soient A, B, C trois ensembles. Démontrer les équivalences suivantes :

1. $A \cap B = A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad A = B$; 2. $A \cup B = A \cap C \quad \Leftrightarrow \quad B \subset A \subset C$.

Exercice 9 Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Si oui, les démontrer, sinon, donner un contre-exemple et écrire leur négation.

- $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$
- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$
- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$
- $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ y^2 > x.$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x.$

Exercice 10 $(*)$ Soient trois nombres a, b et c parmi lesquels un est nul, un est strictement positif et un est strictement négatif qui vérifient les conditions suivantes

$$\begin{cases} a = 0 \Rightarrow b > 0 \\ a > 0 \Rightarrow b < 0 \\ b \neq 0 \Rightarrow c > 0 \end{cases}$$

Déterminer le nombre positif et le nombre négatif, en justifiant qu'il y a unicité de la configuration.

II. Relations binaires, relations d'équivalence

Exercice 11 Etudier les propriétés des relations binaires suivantes :

1. $x \mathscr{R} y$ lorsque $xy > 0$ dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{R}^\star$;

2. $f \mathscr{S} g$ lorsque $\exists x,\ f(x) = g(x)$, dans l'ensembles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

3. $x \mathcal{R} y$ lorsque $(\exists n \in \mathbb{N}^\star, y = x^n)$, dans $\mathbb{N}$.

Exercice 12 On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathscr{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mathscr{R} (x',y') \text{ lorsque } \exists a > 0, \exists b > 0, x' = ax \text{ et } y' = by.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Donner la classe d'équivalence des couples $(1,0), (0,1), (1,1)$.
3. Trouver toutes les classes d'équivalence et les visualiser en faisant un dessin.

SCR: (π,0), (0,√2), (3,4), (-1,5), (-1,-12) (10,-1)(-3;0) (0,-e) (0,0)

Exercice 13 *congruence modulo n*

Soit n un entier naturel non nul. On considère la relation définie sur $\mathbb{Z}$, par :

$$a \equiv b\,[\,n\,] \quad \text{lorsque } n \,|\, (a-b).$$

1. Montrer que $\equiv [\,n\,]$, appelée congruence modulo n, est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer l'ensemble des classes modulo 2 et 3.
3. Prouver que : $a \equiv b\,[\,n\,] \Leftrightarrow a$ et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.
   En déduire l'ensemble quotient dans le cas général.
4. Montrer que pour tous a, b, c éléments de $\mathbb{Z}$:
   $$a \equiv b\,[\,n\,] \Rightarrow \Big[(a+c) \equiv (b+c)\,[\,n\,] \text{ et } (ac) \equiv (bc)\,[\,n\,]\Big]$$
5. $(*)$ En déduire que l'on a aussi, pour a, b, c, d dans $\mathbb{Z}$:
   $a \equiv b\,[\,n\,]$ et $c \equiv d\,[\,n\,] \Rightarrow \Big[(a+c) \equiv (b+d)\,[\,n\,] \text{ et } (ac) \equiv (bd)\,[\,n\,]\Big]$
   (*cad* $\equiv [\,n\,]$ *est compatible avec l'addition et la multiplication*).

Exercice 14 Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, étant donnés deux points $P(x,y)$ et $P'(x',y')$, on note $\mathscr{R}$ la relation définie par :

$$P \mathscr{R} P' \text{ lorsque } xy = x'y'.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence dans le plan et en construire les classes d'équivalence.

Exercice 15 $(*)$ Soit E l'espace usuel. On fixe un point O de E et on définit la relation binaire $\mathscr{R}$ sur l'ensemble des points de E en posant :

$$P \mathscr{R} P' \text{ lorsque } \text{ les points } O, P \text{ et } P' \text{ sont alignés.}$$

1. Est-ce une relation d'équivalence sur E ?
2. On note $E^\star = E \setminus \{O\}$; montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $E^\star$.
   Déterminer l'ensemble quotient.

III. Relations d'ordre

Exercice 16 Dans tout l'exercice, on considère $\mathbb{R}$ ordonné par la relation d'ordre usuelle $\leq$.

On rappelle que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée (resp. minorée) admet une Borne Sup (resp. Borne Inf).

1. Déterminer l'ensemble des minorants et des majorants du sous-ensemble de $\mathbb{R}$: $A_1 = [\,0, 10\,[$.
   Cet ensemble possède-t-il un minimum ? une borne inférieure ? Un maximum ? Une borne supérieure ?
2. Mêmes questions pour le sous-ensemble de $\mathbb{R}$: $A_2 =]-3, +\infty\,[$.
3. Mêmes questions avec le sous-ensemble de $\mathbb{R}$: $A_3 = \ \{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 17

1. Montrer que sur $\mathbb{R}^2$, la relation $(x, y) \preceq (x', y')$ si et seulement si $(x \leq x'$ et $y \leq y')$ est une relation d'ordre, appelée "ordre produit". Dans le plan, dessiner l'ensemble des points (x, y) tels que $(2, 4) \preceq (x, y)$ puis $(x, y) \preceq (2, 4)$. Cet ordre est-il total ?
2. On considère sur $\mathbb{R}^2$, la relation $(x, y) \preceq (x', y')$ si et seulement si $(x < x'$ ou $(x = x'$ et $y \leq y'))$, appelée ordre lexicographique. Dans le plan, dessiner l'ensemble des points (x, y) tels que $(2, 4) \preceq (x, y)$ puis $(x, y) \preceq (2, 4)$. Cet ordre est-il total ?

Exercice 18 Dans l'ensemble $\mathbb{N}$, on définit la relation : $a|b$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N},\ b = ka.$

1. Montrer que $|$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre partiel ou total ?
2. Déterminer le plus grand et le plus petit élément de $(\mathbb{N}, |)$.
3. $(*)$ Déterminer les bornes supérieures et inférieures (quand elles existent) des sous-ensembles suivants :
   $A_1 = \{2, 7, 21, 42\}$ $A_2 = \{2, 7, 21, 43\}$ $A_3 = \{21, 42\}$ $A_4 = \{10, 15, 25\}$.

Exercice 19 Soit E un ensemble.

1. On rappelle que, dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E de cardinal ≥ 2, la relation d'inclusion est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ou partiel ?
2. Dans l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$, existe-t-il un plus grand (*resp.* petit) élément ?
3. $(*)$ Montrer que toute partie $\{F_1, \ldots, F_k\}$ de $\mathcal{P}(E)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure ; les préciser en fonction des F_i.