Aix-Marseille Université	**Année 2022-2023**
L1-PEIP	**U.E. Géométrie et Polynômes**

Devoir Surveillé n°1

(2/11/22) durée 2H

Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La rigueur des raisonnements, la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.
TOUTES LES RÉPONSES DOIVENT ETRE JUSTIFIÉES.

Une bonne réponse NON justifiée sera susceptible de recevoir la moitié des points.

On rendra deux copies séparées : COPIE 1 (ex 1 - 2) COPIE 2 (ex 3 - 4 - 5)

Exercice 1 *Logique-Relations (2,5+3,5 pts)*

1. a) Donner la négation et la contraposée de l'implication $\mathcal{P}$: $\big(A \text{ et non} B\big) \Rightarrow (C \text{ ou } D)$.
   b) (i) Si A, B, C et D sont VRAIES, quelle est la valeur de vérité de $\mathcal{P}$? (*Justifier*)
   (ii) Si A, B, C et D sont FAUSSES, quelle est la valeur de vérité de $\mathcal{P}$? (*Justifier*)
   (iii) Si A est VRAIE et B, C et D sont FAUSSES, quelle est la valeur de vérité de $\mathcal{P}$? (*Justifier*)

2. a) Quelles sont les **propriétés** de la relation $\mathcal{R}_1$ sur $\{a, b, c\}$ définie par : $a\mathcal{R}_1c$ et $b\mathcal{R}_1a$ et $c\mathcal{R}_1b$ et de la relation $\mathcal{R}_2$ définie par : $a\mathcal{R}_2b$ et $a\mathcal{R}_2c$ et $b\mathcal{R}_2b$ et $c\mathcal{R}_2a$ et $c\mathcal{R}_2b$ et $c\mathcal{R}_2c$? (*Justifier toutes les réponses*)
   Indication. on pourra dessiner le graphe des deux relations pour mieux visualiser les propriétés

   b) (i) Dessiner une relation $\mathcal{R}_3$ sur trois éléments qui soit : [**non symétrique**] **et transitive** avec un **nombre maximal** de flèches. $\mathcal{R}_3$ est-elle **réflexive** ?(*On ne demande pas de justifier*)
   (ii) Dessiner une relation $\mathcal{R}_4$ sur trois éléments qui soit : **symétrique et** [**non transitive**] avec un **nombre maximal** de flèches. $\mathcal{R}_4$ est-elle **réflexive** ? (*On ne demande pas de justifier*)
   (iii) Dessiner une relation $\mathcal{R}_5$ sur trois éléments qui soit : réflexive, symétrique et [non transitive] avec un **nombre maximal** de flèches. (*On ne demande pas de justifier*)

Exercice 2 *Relation d'équivalence (4pts)*

Sur $E = (\mathbb{R}^*)^2$ on définit la relation : $\forall (x, y), (x', y') \in E, \quad (x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y') \quad \text{lorsque} \quad xy' = yx'$.

1. Prouver que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
2. Expliciter la classe de $(1, 1)$, de $(1, 2)$ et de $(-4, 1)$. Les dessiner.
3. Compléter la phrase : la classe d'un élément quelconque (x_0, y_0) de E est ...... d'équation ......
4. Donner un **S**ystème **C**omplet de **R**eprésentants pour la relation $\mathcal{R}$ sur E.

BONUS [1pt] : Prouver que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$, en étudiant les éléments en relation avec le couple $(0, 0)$.

COPIE 2

Exercice 3 *Suites (6pts)*

Soit $f :]-2,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$.

1. a) Étudier les variations de la fonction f sur $]-2,+\infty[$.

   b) Justifier que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$. Que peut-on en déduire pour l'intervalle $I = [0,+\infty[$ par rapport à la fonction f ?

Soit $a \geq 0$. On admet que l'on peut définir par récurrence une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

2. Montrer par récurrence que $u_n \in I$ pour tout $n \geq 0$.
3. a) Au vu des variations de la fonction f, que peut-on dire sur la suite $(u_n)_n$?

   b) Peut-on en déduire que la suite $(u_n)_n$ converge ? (*Justifier*)

On fixe maintenant $u_0 = 2$.

4. a) Calculer u_1 et le comparer à u_0. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_n$.

   b) Justifier que la suite $(u_n)_n$ converge.
5. a) Que doit vérifier la limite ℓ de $(u_n)_n$? (*Justifier en rappelant toutes les hypothèses nécessaires*).

   b) Déterminer ℓ en résolvant cette équation. (*Justifier qu'une seule solution peut être la limite*)

Exercice 4 *Suites (4pts)*

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $v_n = u_n + \frac{2}{n}$.

1. Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$.
2. Justifier que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes et ont la même limite.
3. Calculer les trois premiers termes de $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$.
4. Déduire un encadrement pour $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5 *Suites (2pts)*

Démontrer, en revenant à la définition de convergence d'une suite, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sin n}{\sqrt{n+1}}\right) = 0$