Aix-Marseille Université	**Année 2021-2022**
L1-PEIP	**U.E. Géométrie et Polynômes**

Devoir Surveillé n°1

durée 2H

Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La rigueur des raisonnements, la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.
TOUTES LES RÉPONSES DOIVENT ETRE JUSTIFIÉES.

Une bonne réponse NON justifiée sera susceptible de recevoir la moitié des points.

On rendra deux copies séparées : COPIE 1 (ex 1 - 2)   COPIE 2 (ex 3 - 4)

Exercice 1 *Logique (8 pts)*

1. a) Donner la négation et la contraposée de l'implication : $P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)$. (1pt)

   b) A-t-on l'équivalence : $\big[P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)\ \big] \iff \big[(P \Rightarrow Q) \text{ ou } R\ \big]$? (1pt)

   c) On suppose vraie **l'assertion** $\mathcal{P}$: S'il fait beau, alors Elsa va à la plage ou elle mange une glace.

   (i) Il fait beau et Elsa ne mange pas de glace. Qu'en déduit-on ? (0,5pt)

   (ii) Elsa ne va pas à la plage et ne mange pas de glace. Qu'en déduit-on ? (0,5pt)

   (iii) Il fait mauvais temps. Qu'en déduit-on ? (0,5pt)

   (iv) Elsa va à la plage et mange une glace. Qu'en déduit-on ? (0,5pt)

   d) On suppose maintenant que $\mathcal{P}$ est fausse. Qu'en déduit-on ? (0,5pt)

2. a) Énoncer (en langage formel) le fait que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur l'ensemble E mais que ce n'est pas une relation d'équivalence sur E. (1,5pt)

   b) Énoncer le fait que la relation d'ordre $\mathcal{R}$ n'est pas un ordre total sur E. (0,5pt)

   c) Dessiner le graphe de toutes les relations d'ordre sur un ensemble à 3 éléments qui ne sont pas des relations d'équivalence. (*il y en a 4*).   Parmi elles, y en a-t-il une qui soit un ordre total ? (1,5pt)

Exercice 2 *Relations (2pts)*

On note E l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par :

$$\forall\, f, g \in E, \quad f\,\mathcal{R}\,g \quad \text{lorsque} \quad f'(0) = g'(0).$$

On admet que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

On note $e : x \mapsto e^x$, $c : x \mapsto x^2$, $f_0 : x \mapsto 3x - 1$ et $i : x \mapsto x$.

Soit le sous-ensemble $F = \{e, c, i, f_0, \cos, \sin\}$ de l'ensemble E .

1. Dessiner le graphe de la relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble F. (1pt)
2. Donner les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sur F ainsi que le cardinal de l'ensemble quotient $F/\mathcal{R}$. (1pt)

COPIE 2

Exercice 3 *Relation d'équivalence (5pts)*

Sur l'ensemble $E = [-\pi, \pi]$ on définit la relation : $\forall a, b \in E, \ , a \,\mathcal{R}\, b$ lorsque $\sin^2 a + \cos^2 b = 1$.

1. A-t-on $0 \,\mathcal{R}\, \pi$? $\pi \,\mathcal{R}\, 0$? $-\dfrac{\pi}{2} \,\mathcal{R}\, \dfrac{\pi}{2}$? et plus généralement $(-x) \,\mathcal{R}\, x$, pour $x \in E$? (1pt)

2. Prouver que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. (2,5pts)

N.B. *Pour la symétrie et la transitivité, on se souviendra que l'on peut exprimer* $\sin^2\theta$ *en fonction de* $\cos^2\theta$ *et inversement, grâce à la formule trigonométrique classique.*

3. Expliciter $\mathrm{cl}(0)$, $\mathrm{cl}(\pi/4)$ et $\mathrm{cl}(\pi/2)$. (1,5pts)

Bonus

4. a) Prouver que, pour $x, y \in E$, $y \in \mathrm{cl}(x)$ ssi $\cos y = \pm \cos x$. **(1pt)**

b) En déduire la classe d'équivalence d'un élément x quelconque de E. **(0,5pt)**

(*On pourra représenter* x *et* $\cos x$ *sur un cercle trigonométrique.*)

Exercice 4 *Suites (5pts)*

1. Donner un exemple de suite $(a_n)_n$ **croissante** qui converge vers -10. (0,5pt)
2. Ecrire qu'une suite $(x_n)_n$ n'est ni majorée ni divergente vers $+\infty$ puis en donner un exemple. (1,5pts)
   On ne demande pas de justification concernant l'exemple.
3. a) Démontrer, **en revenant à la définition de la convergence d'une suite**, que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$ converge vers 0. (1,5pts)

   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante et bornée par 0 et $\ln 2$. (1,5pts)

   Bonus

   c) Prouver que $A = \{u_n \ / n \geq 1 \} = \{\ln(1 + \frac{1}{n}) \ / n \geq 1\}$ possède un maximum et une borne inférieure, que l'on déterminera, mais qu'il n'a pas de minimum. **(1,5pts)**

RAPPEL : Toutes les réponses doivent être justifiées